

LE TRAITEMENT D'IMAGES

- FILTRAGE -

Jonathan Fabrizio

<http://jo.fabrizio.free.fr>

Filtrage

Domaines spatial et fréquentiel
Lissage, élimination du bruit
Détection de bords/coins

Plan du cours

- Quelques filtres classiques pour
 - le lissage/élimination du bruit
 - la détection de bords
 - la détection de points d'intérêts
 - l'amélioration de la netteté
- Passage dans le domaine fréquentiel
 - Transformée de Fourier
 - Convolution

Filtrage

Quelques filtres classiques

Filtrage

- On s'appuie souvent sur le produit de convolution
- On va recalculer la valeur d'un pixel en fonction de son voisinage

Filtres classiques : Lissage, débruitage

Filtres classiques : moyenne

Lissage

- Filtre moyennneur
 - Objectif : lisser l'image
 - Fonctionnement : on remplace la valeur d'un pixel par la moyenne des valeurs des pixels du voisinage
 - Noyau de convolution :

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Comment choisir la taille/la forme du voisinage ?

Filtres classiques : moyenne

Lissage

- Filtre moyennneur, résultat :



Filtres classiques : moyenne

Impact de la taille du voisinage

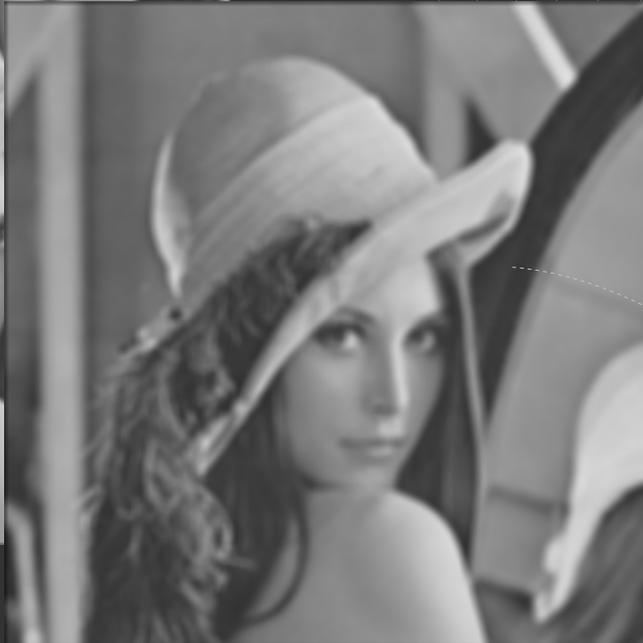
- Filtre moyenneur, résultats :



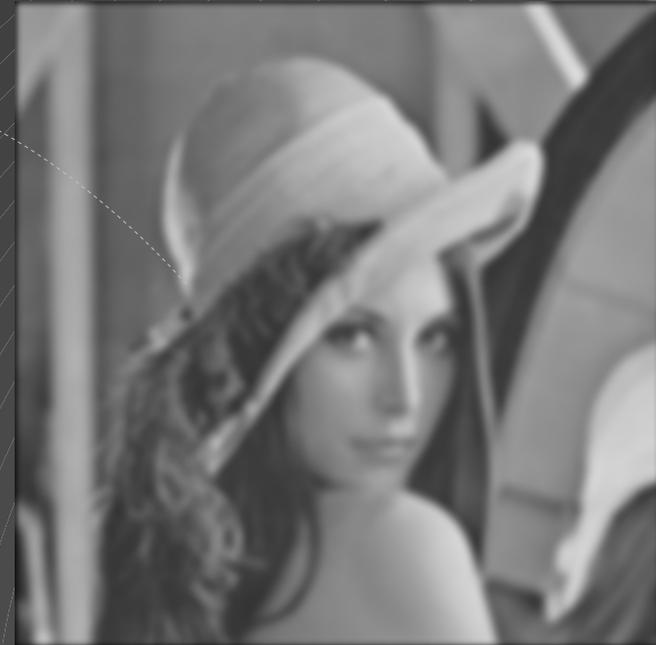
Original



3x3



5x5



Filtres classiques

- Implémentation
 - Comment implémenter un tel filtre ?
 - Que faire sur la bordure ?
- Amélioration ?
 - ?

Filtres classiques

- Implémentation
 - Comment implémenter un tel filtre ?
 - Que faire sur la bordure ?
- Amélioration ?
 - Au lieu de faire contribuer tous les pixels également, on peut privilégier les pixels proches du centre
 - Filtre gaussien

Filtres classiques : Gaussien

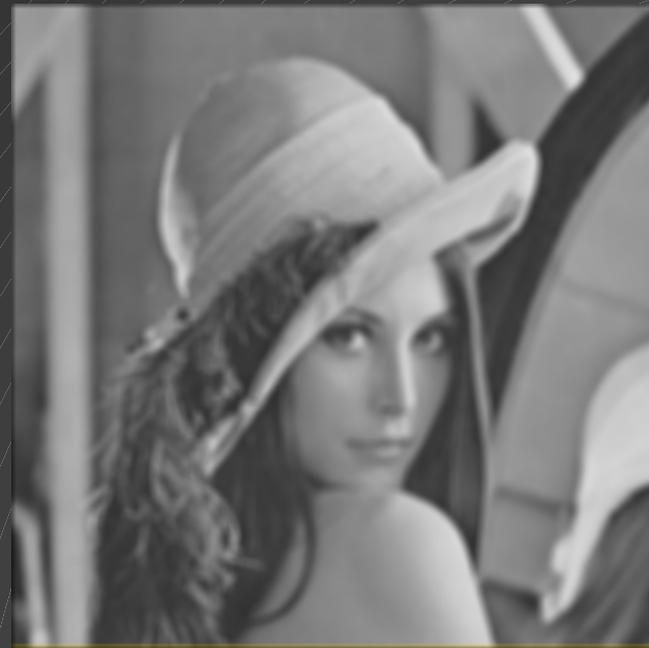
Lissage

- Filtre Gaussien
 - Objectif : lisser l'image
 - Fonctionnement : on remplace la valeur d'un pixel par la moyenne pondérée des valeurs des pixels du voisinage
 - Noyau de convolution : gaussienne
 - Paramètre / Taille du Noyau ?

Filtres classiques : Gaussien

Lissage

- Filtre Gaussien – résultat
 - Comparaison avec le filtre moyennneur
 - Avantages/Inconvénients ?



Filtres classiques : Médian

Lissage

- Filtre médian
 - Objectif : débruitage
 - Fonctionnement : trier l'ensemble des valeurs des intensités des pixels sur un voisinage puis remplacer la valeur du pixel considéré par la valeur médiane sur le voisinage

Filtres classiques : Médian

Lissage

- Filtre médian – résultat
 - Supprime facilement le bruit impulsionnel
 - Préserve l'information de contour
 - Est un peu lourd (tri)



Filtres classiques : Gaussien

Lissage

- Lissage (gaussien, moyenne...)
 - Dégrade les frontières
 - Solutions ?

Filtres classiques : Gaussien

Lissage

- Lissage (gaussien, moyenne...)
 - Dégrade les frontières
 - Solutions ?
 - Faire contribuer principalement les pixels qui ont une couleur proche de la couleur du pixel considéré ou pondérer leur apport en fonction de leur couleur
 - Filtre de Nagao
 - ...

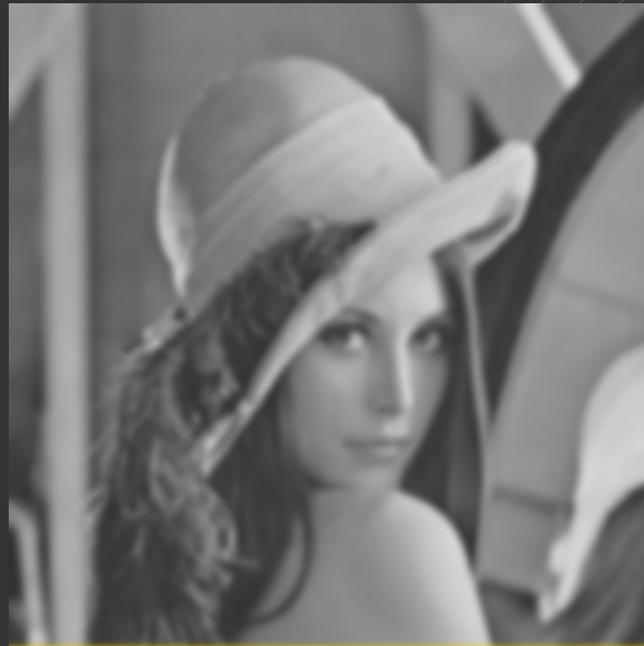
Filtres classiques : Gaussien

Lissage

- Filtre gaussien, résultats :



Original



Gaussien



Gaussien sélectif

Filtres classiques : Nagao

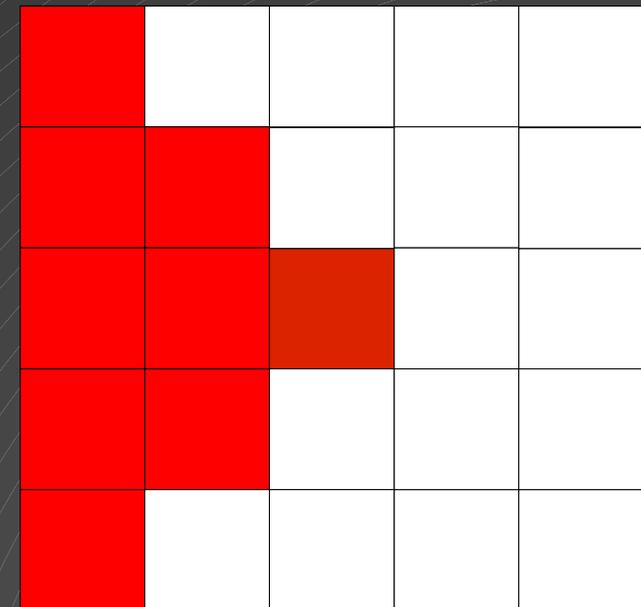
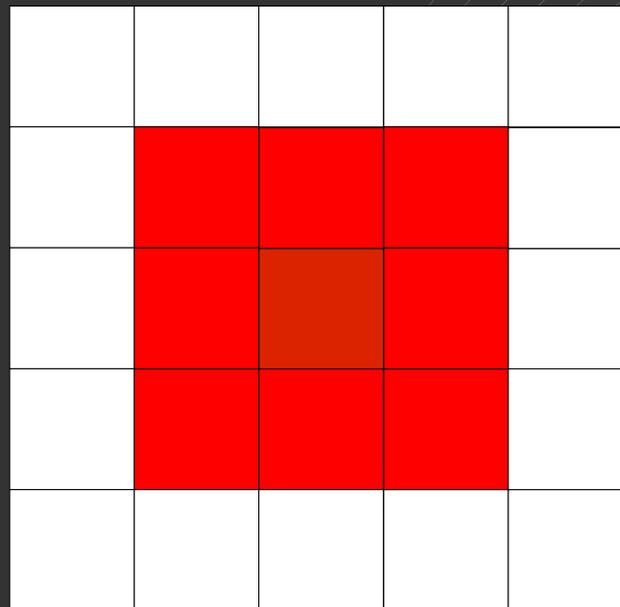
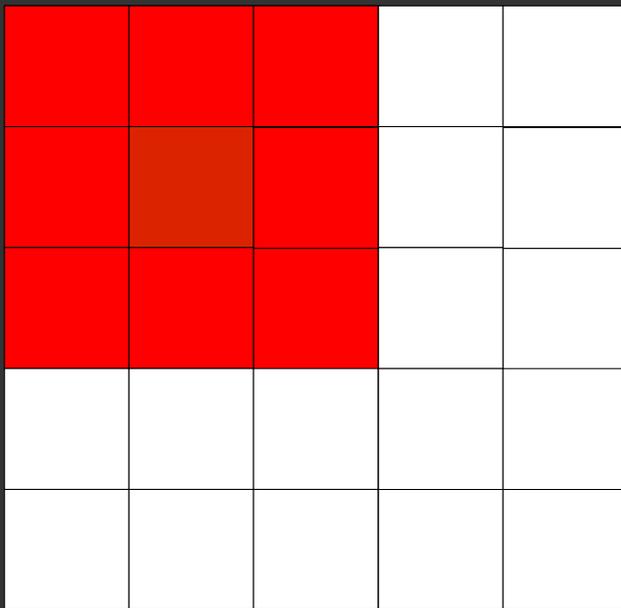
Lissage

- Filtre de Nagao
 - Tenir compte des régions ?

Filtres classiques : Nagao

Lissage

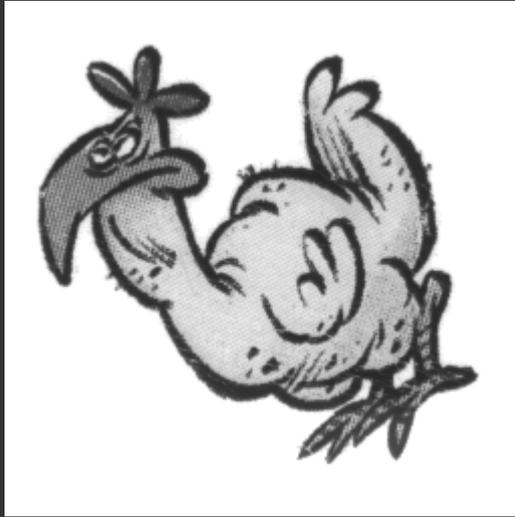
- Filtre de Nagao
 - Faire un médian mais dans la région de variance faible



Filtres classiques : Nagao

Lissage

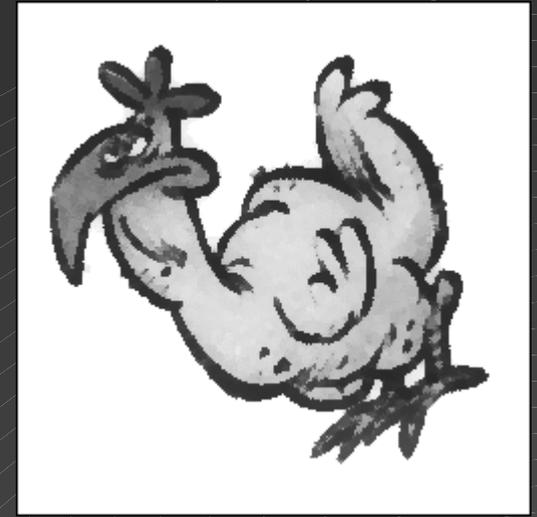
- Filtre de Nagao (pas un traiteur d'images), résultats



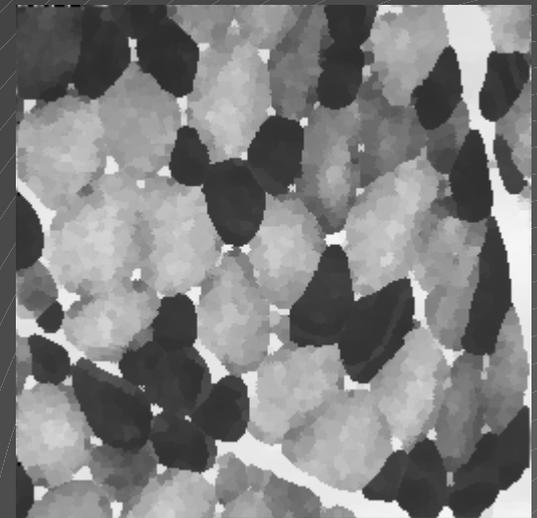
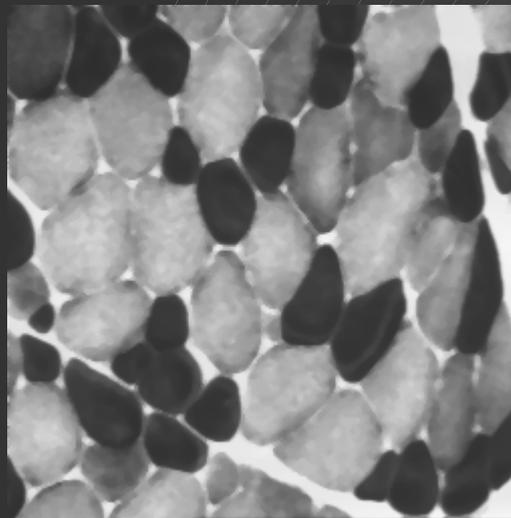
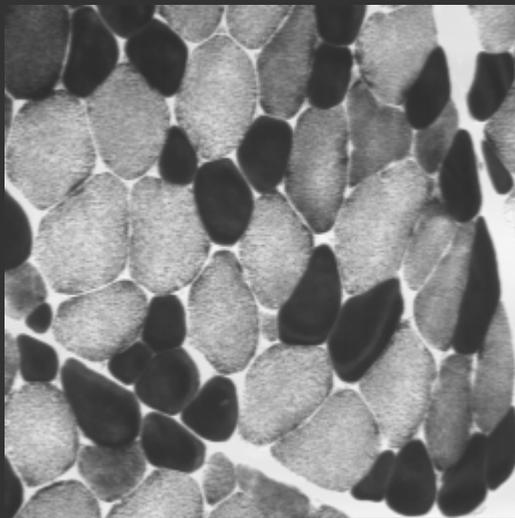
Originaux



Médian



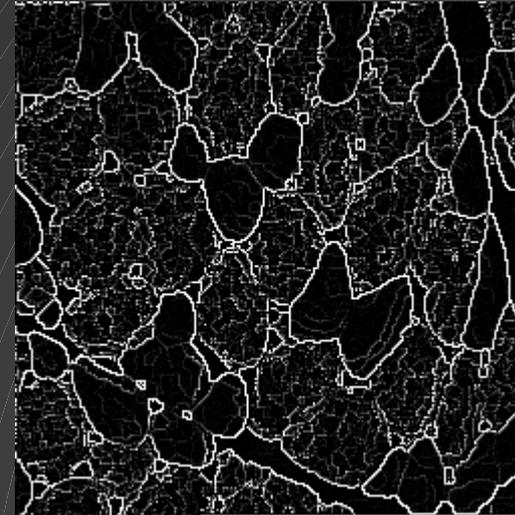
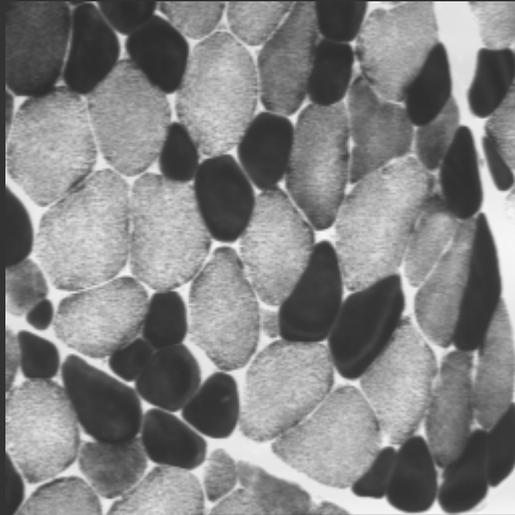
Nagao



Filtres classiques

Détection de bords

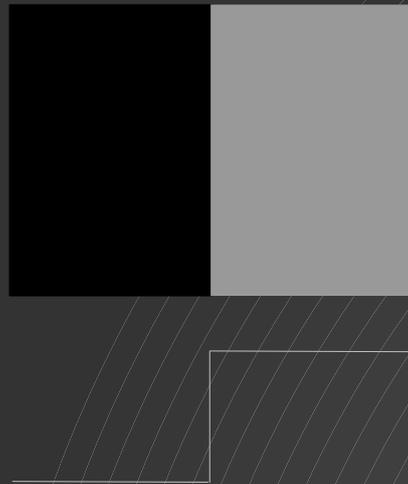
- Détection de bords
 - Comment se caractérise un contour ?
 - Comment trouver les contours ?
 - Pourquoi trouver les contours ?



Filtres classiques

Détection de bords

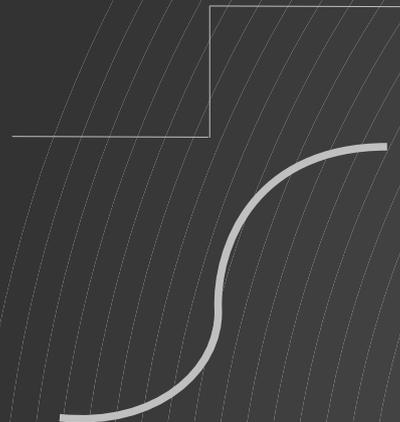
- Définir la notion de bord / contour
 - Transition brutale (échelon)



Filtres classiques

Détection de bords

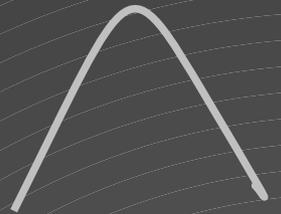
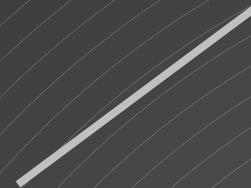
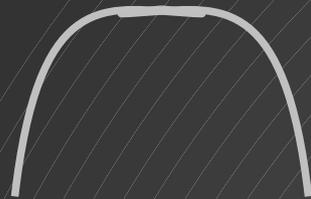
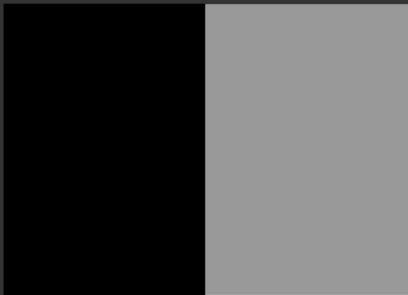
- Définir la notion de bord / contour
 - Transition brutale (échelon)



Filtres classiques

Détection de bords

- Définir la notion de bord / contour
 - Quelle opération réaliser pour détecter ce type de motifs ?



Filtres classiques

Détection de bords

- Détection de bord : calcul de la dérivée ?



$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$



$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$



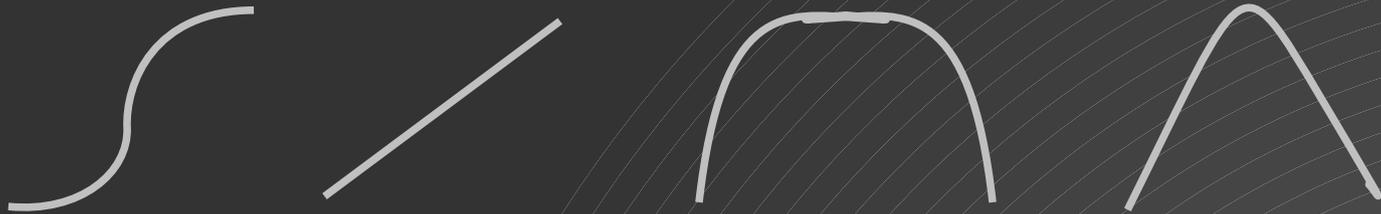
Filtres classiques

Détection de bords

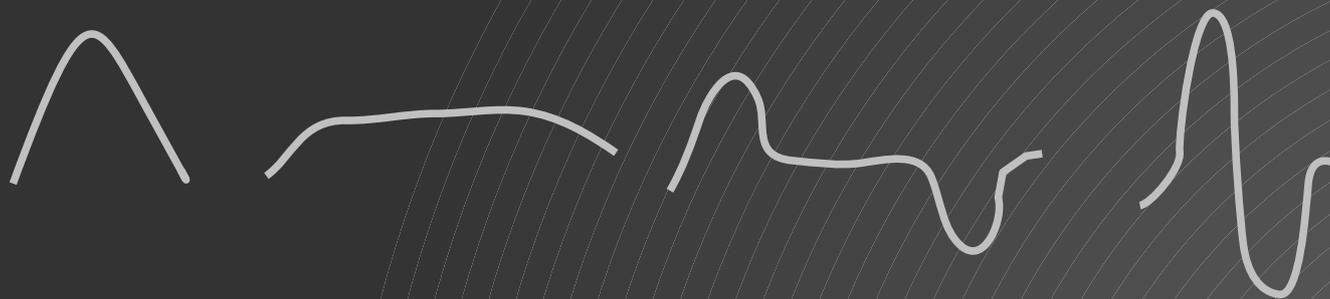
- Détection de bord : calcul de la dérivée :

- $$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Profil :



Dérivée :



- Recherche de maxima locaux ?

Filtres classiques

Détection de bords

- Calcul de la dérivée en 1 point x

- En continu :
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Dans notre cas (discret) :

- $f'(x) = (f(x+1) - f(x))$ ou $\frac{1}{2} * (f(x+1) - f(x-1))$

- Masques :

-1	1		1/2	-1	0	1
----	---	--	-----	----	---	---

- Attention signal 2D

Filtres classiques : Roberts

Détection de bords

- Filtre de Roberts

$$r(x,y) = \text{sqrt}((i(x,y)-i(x-1,y-1))^2 + (i(x,y-1)-i(x-1,y))^2)$$

$$r(x,y) = | i(x,y)-i(x-1,y-1) | + | i(x,y-1)-i(x-1,y) |$$

- Contours pas forcément nets

Filtres classiques : Sobel, Prewitt

Détection de bords

- Sobel

-1	0	1	-1	-2	-1
-2	0	2	0	0	0
-1	0	1	1	2	1

- Prewitt

-1	0	1	-1	-1	-1
-1	0	1	0	0	0
-1	0	1	1	1	1

Pourquoi ces coefficients ?

Filtres classiques : Sobel, Prewitt

Détection de bords

- Sobel

-1	0	1	-1	-2	-1
-2	0	2	0	0	0
-1	0	1	1	2	1

- Prewitt

-1	0	1	-1	-1	-1
-1	0	1	0	0	0
-1	0	1	1	1	1

Inclusion du lissage...

Filtres classiques : Sobel, Prewitt

Détection de bords

Sobel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

Prewitt

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Filtres classiques : Sobel, Prewitt

Détection de bords

Sobel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

Prewitt

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1



$$\text{sqrt} (sx^2+sy^2)$$

$$\text{tan}^{-1} (sy/sx)$$

Filtres classiques

Détection de bords

- Comment récupérer les contours à partir de l'image du gradient ?



Filtres classiques

Détection de bords

- Comment récupérer les contours à partir de l'image du gradient ?



Le vecteur gradient est orthogonal aux lignes de niveaux

plus sa norme est grande plus la transition est forte

On cherche une transition maximale

Filtres classiques

Détection de bords

- Comment récupérer les contours à partir de l'image du gradient ?



- Différentes stratégies :
 - Seuillage
 - Seuillage par hystérésis
 - Recherche de lignes de crête
- Problème :
 - Contour fermé/contour ouvert ?

Filtres classiques : Kirsch, Robinson

Détection de bords

- Kirsch and Robinson Compass Masks :

-3	-3	5	-3	5	5	5	5	5
-3	0	5	-3	0	5	-3	0	-3
-3	-3	5	-3	-3	-3	-3	-3	-3

-1	0	1	0	1	2	1	2	1
-2	0	2	-1	0	1	0	0	0
-1	0	1	-2	-1	0	-1	-2	-1

0

1

2

...

7

Filtres classiques : Kirsch, Robinson

Détection de bords

- Kirsch and Robinson Compass Masks :

-3	-3	5	-3	5	5	5	5	5
-3	0	5	-3	0	5	-3	0	-3
-3	-3	5	-3	-3	-3	-3	-3	-3

-1	0	1	0	1	2	1	2	1
-2	0	2	-1	0	1	0	0	0
-1	0	1	-2	-1	0	-1	-2	-1

0

1

2

... 7

L'amplitude est donnée par la plus forte réponse

L'orientation est déduite du masque qui a donné la plus forte réponse

« Sobel que l'on fait tourner... »

Filtres classiques : Frei-Chen

Détection de bords

- Frei-Chen

$1/(2\sqrt{2})$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>$\sqrt{2}$</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>$-\sqrt{2}$</td><td>-1</td></tr></table>	1	$\sqrt{2}$	1	0	0	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	$1/(2\sqrt{2})$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>$\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>$+\sqrt{2}$</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr></table>	1	0	-1	$\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$	1	0	-1	$1/(2\sqrt{2})$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>-1</td><td>$\sqrt{2}$</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>$-\sqrt{2}$</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	-1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	1	0	$1/(2\sqrt{2})$	<table border="1"><tr><td>$\sqrt{2}$</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>$-\sqrt{2}$</td></tr></table>	$\sqrt{2}$	-1	0	-1	0	1	0	1	$-\sqrt{2}$	edge
1	$\sqrt{2}$	1																																										
0	0	0																																										
-1	$-\sqrt{2}$	-1																																										
1	0	-1																																										
$\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$																																										
1	0	-1																																										
0	-1	$\sqrt{2}$																																										
1	0	-1																																										
$-\sqrt{2}$	1	0																																										
$\sqrt{2}$	-1	0																																										
-1	0	1																																										
0	1	$-\sqrt{2}$																																										
$1/2$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0	$1/2$	<table border="1"><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr></table>	-1	0	1	0	0	0	1	0	-1	$1/6$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr><tr><td>-2</td><td>4</td><td>-2</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr></table>	1	-2	1	-2	4	-2	1	-2	1	$1/6$	<table border="1"><tr><td>-2</td><td>1</td><td>-2</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>-2</td><td>1</td><td>-2</td></tr></table>	-2	1	-2	1	4	1	-2	1	-2	line
0	1	0																																										
-1	0	-1																																										
0	1	0																																										
-1	0	1																																										
0	0	0																																										
1	0	-1																																										
1	-2	1																																										
-2	4	-2																																										
1	-2	1																																										
-2	1	-2																																										
1	4	1																																										
-2	1	-2																																										
$1/3$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9 masques qui forme une base.																																	
1	1	1																																										
1	1	1																																										
1	1	1																																										

Filtres classiques : Frei-Chen

Détection de bords

- Frei-Chen

- La détection se fait seulement avec :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} + \text{rotations à } 90^\circ$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\sum_{k=1}^4 (W_k * I)^2}{\sum_{k=1}^9 (W_k * I)^2} \right)$$

- Plus theta est grand, moins la bordure est marquée (theta est entre 0 et Pi).
- Avantage :
 - Plus robuste à différents niveaux d'illumination
 - Plus robuste car élimine les motifs lignes, points... de la détection
 - Peut être utilisé pour détecter les lignes en utilisant les masques 5 à 8 à la place des masques 1 à 4.

Filtres classiques : Le laplacien

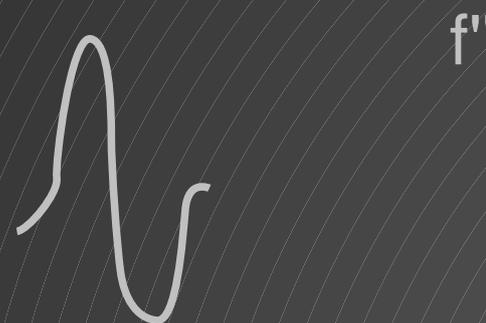
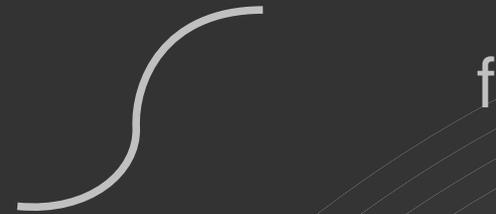
Détection de bords

- Utilisation de la dérivée seconde
 - Un point de contour est un passage à zéro de la dérivée seconde

Filtres classiques : Le laplacien

Détection de bords

- Dérivée seconde :



Filtres classiques : Le laplacien

Détection de bords

- Calcul du laplacien
 - $f'(x) = f(x+1) - f(x)$
 - $f''(x) = f'(x+1) - f'(x)$
 - $f''(x) = f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x)$
 - $f''(X) = f(X+1) - 2 * f(X) + f(X-1)$

Filtres classiques : Le laplacien

Détection de bords

- Masque pour le Laplacien
 - $f''(X) = f(X+1) - 2 * f(X) + f(X-1)$

-1	2	-1
----	---	----

Filtres classiques : Le laplacien

Détection de bords

- Masque pour le Laplacien

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

Filtres classiques : Le laplacien

Détection de bords

- Un point de contour est un passage à zéro de la dérivée seconde
- Les contours sont repérés par un changement de signe

	A	
B	E	D
	C	

On va plutôt chercher un changement de signe (de forte amplitude)

Si $E > 0$ il faut un des A, B, C, ou D < 0 et inversement si $E < 0$

Filtres classiques : Le laplacien

Détection de bords

- Le calcul des dérivées est approché au moyen de filtres
 - Simple et rapide
 - Inconvénients : approximation, sensibilité au bruit, en particulier le Laplacien → Nécessite de lisser le signal avant ou lors de la dérivation
- Impact du lissage
 - Robustesse au bruit
 - Délocalisation des points de contour
- Le Laplacien est sensible au bruit → sur-segmentation

Filtres classiques

Détection de bords

- Évaluation de la qualité de la détection de contours :
 - Bonne détection
 - Bonne localisation
 - Réponse unique
 - Cf filtre de Canny/Deriche

Filtres classiques

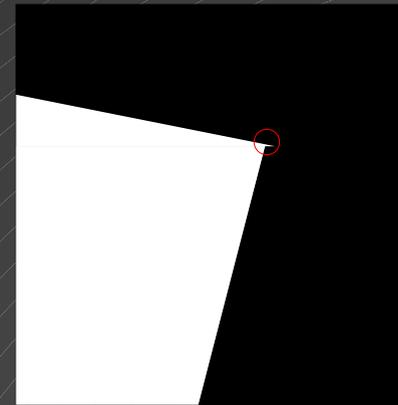
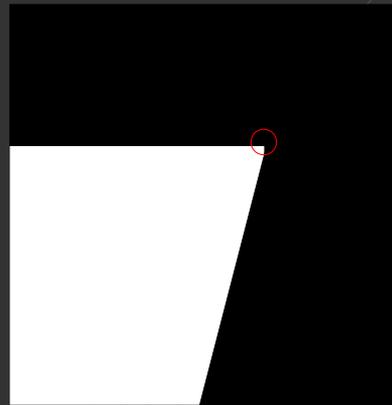
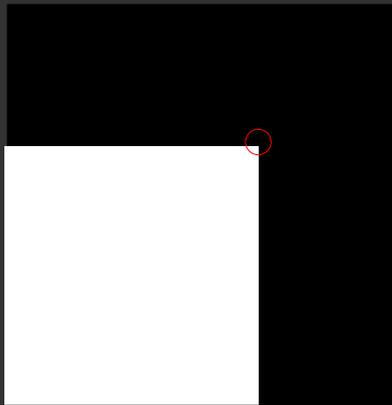
Détection de points d'intérêts

- Détection de coins
 - Comment se caractérise un coin ?
 - Comment trouver les coins ?
 - Pourquoi trouver les coins?

Filtres classiques

Détection de points d'intérêts

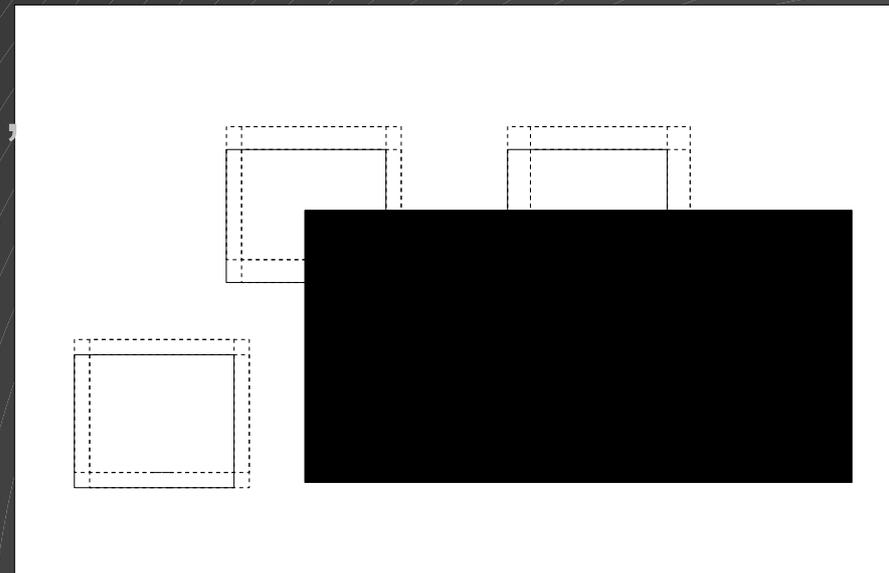
- Détection de coins
 - Coin = gradient fort dans deux directions



Filtres classiques : Moravec

Détection de points d'intérêts

- Pour chaque point
 - On fait la somme S des différences des intensités entre un voisinage centré sur le point et le voisinage décalé.
 - On réitère le calcul avec des décalages dans toutes les directions
 - Pour chaque point, on garde, parmi tous les décalages i le résultat de S_i qui a donné la plus faible valeur



Filtres classiques : Moravec

Détection de points d'intérêts

- Moravec
 - Calcul d'un critère sur toute l'image

$$c_{d_x, d_y}(x, y) = \sum_{i=-s \dots +s} \sum_{j=-s \dots +s} (I(x+i, y+j) - I(x+i+d_x, y+j+d_y))^2$$

- On calcul un critère pour chaque point

$$c(x, y) = \min_{d_x, d_y} (c_{d_x, d_y}(x, y))$$

- Un coin est un maximum local de $c(x, y)$

Filtres classiques : Moravec

Détection de points d'intérêts

- Moravec
 - Sensible au bruit (des petites imperfections peuvent être prises pour des coins)
 - Contours de certaines directions peuvent être pris pour des coins (anisotrope car on considère que quelques directions)

Filtres classiques : Harris

Détection de points d'intérêts

- Révision du critère pour être plus robuste

$$c_{d_x, d_y}(x, y) = \sum_{i=-s \dots +s} \sum_{j=-s \dots +s} w(i, j) (I(x+i, y+j) - I(x+i+d_x, y+j+d_y))^2$$

$$I(x+d_x, y+d_y) \approx I(x, y) + d_x \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial x} \right) + d_y \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right) + \dots$$

$$c_{d_x, d_y}(x, y) = \sum_{i=-s \dots +s} \sum_{j=-s \dots +s} w(i, j) \left(d_x \left(\frac{\partial I(x+i, y+j)}{\partial x} \right) + d_y \left(\frac{\partial I(x+i, y+j)}{\partial y} \right) \right)^2$$

Filtres classiques : Harris

Détection de points d'intérêts

- Critère :

$$c_{d_x, d_y}(x, y) = \sum_{i=-s \dots +s} \sum_{j=-s \dots +s} w(i, j) \left(d_x \left(\frac{\partial I(x+i, y+j)}{\partial x} \right) + d_y \left(\frac{\partial I(x+i, y+j)}{\partial y} \right) \right)^2$$

$$\left(d_x \left(\frac{\partial I(x+i, y+j)}{\partial x} \right) + d_y \left(\frac{\partial I(x+i, y+j)}{\partial y} \right) \right)^2 = (d_x \ d_y) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 & \left(\frac{\partial I}{\partial x \partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial I}{\partial x \partial y} \right) & \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

- Ce qui donne :

$$A d_x^2 + 2C d_x d_y + B d_y^2$$

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 & \left(\frac{\partial I}{\partial x \partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial I}{\partial x \partial y} \right) & \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix}$$

- Avec w une gaussienne

Filtres classiques : Harris

Détection de points d'intérêts

- Nouveau critère H

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial I}{\partial x \partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial I}{\partial x \partial y}\right) & \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

- $H = \det(M) - \alpha \text{trace}(M)^2$

- $\lambda_1 \lambda_2$ les deux valeurs propres

- $\det(M) = \lambda_1 \lambda_2$ et $\text{trace}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$

- $H = \lambda_1 \lambda_2 - \alpha (\lambda_1 + \lambda_2)^2$

- $H < 0$ contour

- $H \rightarrow 0$ ras

- $H \gg 0$ coin

- α grand $\Rightarrow H$ diminue et le détecteur est moins sensible

- α petit $\Rightarrow H$ augmente et le détecteur est plus sensible

Filtres classiques : Achard, Bigorgne, Devars

Détection de points d'intérêts

- Détection basée sur le produit vectoriel
 - Près d'un coin, la norme du produit vectoriel entre deux vecteurs gradients est grande
 - Dans une zone homogène elle est faible
 - La norme des vecteurs gradients est petite
 - Sur un contour elle est faible aussi
 - L'angle formé entre deux vecteurs gradients proches est petit

Filtres classiques : Achard, Bigorgne, Devars

Détection de points d'intérêts

- Détection basée sur le produit vectoriel
 - Pour chaque point i , avec un voisinage V_i , on détermine un critère k :

$$k = \sum_{j \in V_i} \|\overrightarrow{\text{grad } P_i} \wedge \overrightarrow{\text{grad } P_j}\|^2$$

$$k = \sum_{j \in V_i} \|\overrightarrow{\text{grad } P_i}\|^2 \|\overrightarrow{\text{grad } P_j}\|^2 \sin^2(\overrightarrow{\text{grad } P_i}, \overrightarrow{\text{grad } P_j})$$

Filtres classiques : Achard, Bigorgne, Devars

Détection de points d'intérêts

- Détection basée sur le produit vectoriel
 - Pour chaque point i , avec un voisinage V_i , on détermine un critère k :

$$k = \sum_{j \in V_i} \|\overrightarrow{\text{grad } P_i}\|^2 \|\overrightarrow{\text{grad } P_j}\|^2 \sin^2(\widehat{\text{grad } P_i, \text{grad } P_j})$$

$$I_x = \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right) \quad I_y = \left(\frac{\partial I}{\partial y} \right) \quad \|\overrightarrow{\text{grad } P}\|^2 = I_x^2 + I_y^2$$

$$\sin(\widehat{ox, \text{grad } P}) = \frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \quad \cos(\widehat{ox, \text{grad } P}) = \frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}$$

$$k = I_x^2 \langle I_y^2 \rangle + I_y^2 \langle I_x^2 \rangle - 2 I_x I_y \langle I_x I_y \rangle \quad \langle I \rangle = I * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtres classiques

Détection de points d'intérêts - Résultats

- Quelques résultats (Harris)

Filtres classiques

Détection de points d'intérêts - Résultats

- Quelques résultats (Achard)



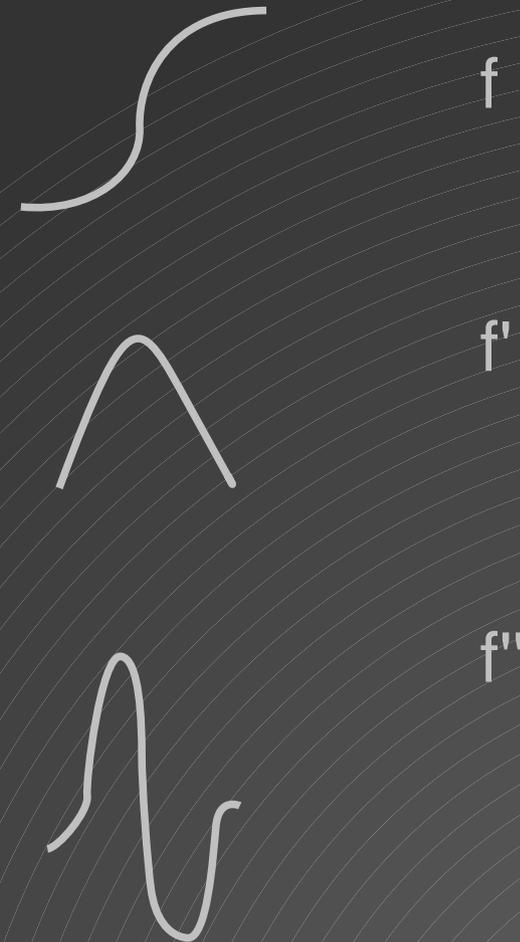
Filtres classiques

Amélioration de la netteté

Filtres classiques : Laplacien

Amélioration de la netteté

- Retour sur la dérivée seconde
(Laplacien)



Filtres classiques : Laplacien

Amélioration de la netteté

- Calcul du laplacien
 - $f'(x) = f(x+1) - f(x)$
 - $f''(x) = f'(x+1) - f'(x)$
 - $f''(x) = f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x)$
- $f''(X) = f(X+1) - 2 * f(X) + f(X-1)$

Filtres classiques : Laplacien

Amélioration de la netteté

- Masque pour le Laplacien
 - $f''(X) = f(X+1) - 2 * f(X) + f(X-1)$

-1	2	-1
----	---	----

Filtres classiques : Laplacien

Amélioration de la netteté

- Masque pour le Laplacien

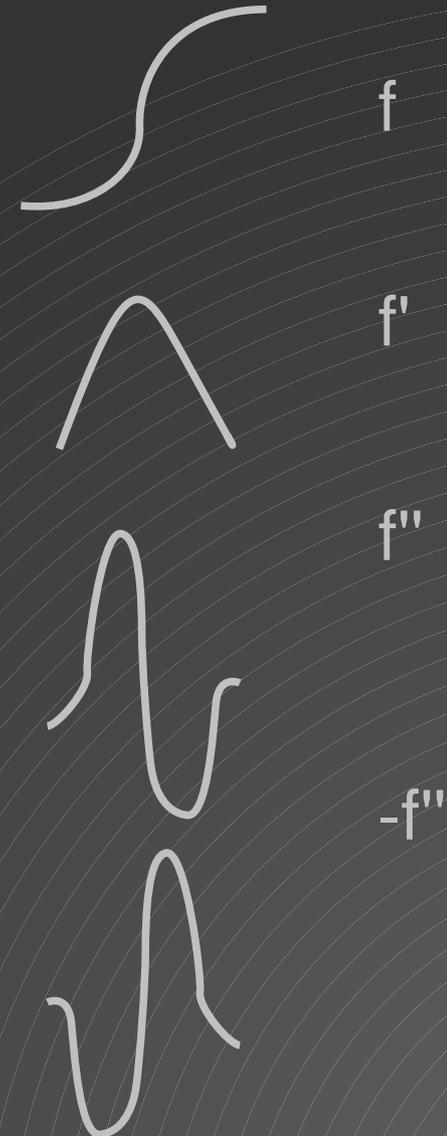
0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

Filtres classiques : Laplacien

Amélioration de la netteté

- Renforcement de la netteté :

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

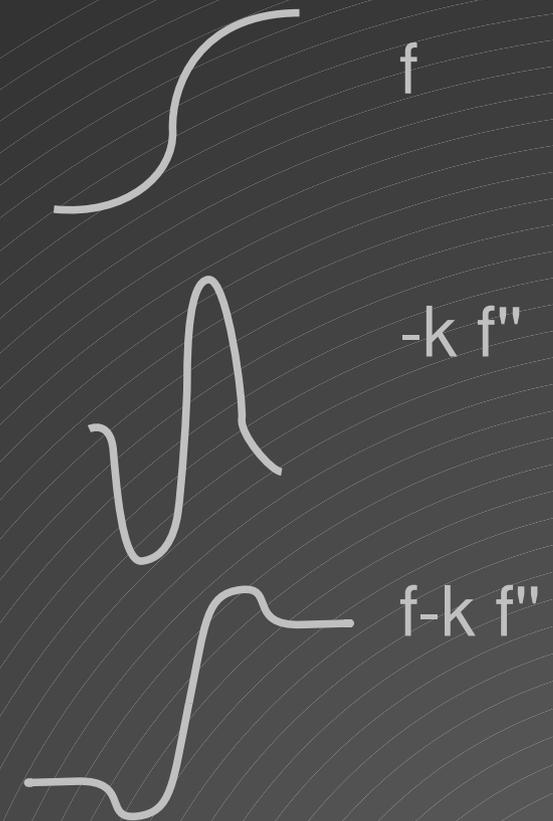


Filtres classiques : Laplacien

Amélioration de la netteté

- Masque pour le Laplacien

	0	-1	0
k	-1	4	-1
	0	-1	0



Filtres classiques

Amélioration de la netteté : Résultats

- Augment la netteté
- Renforce le bruit



Filtres classiques

- Détection de bord/coin
- Lissage
- Amélioration de la netteté
- ...
 - ✓ Attention : Pensez à la correction gamma.

Signal

- Signal
 - Représentation Mathématique d'un phénomène physique
- Traitement du signal
 - Élaboration, détection et interprétation des signaux
- Classification des signaux
 - Morphologique : Continu/Discret
 - Spectrale : Bande de fréquences BF/HF
 - Énergie : Énergie finie/Puissance moyenne finie
 - Typologie : déterministe/aléatoire
 - Périodicité : non périodique/ $x(t) = x(t+T)$

Signal

- Énergie

- Énergie w_x d'un signal x

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Les signaux à énergie finie vérifient la condition :

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

- Les signaux à support borné (c-a-d de durée limitée) sont à énergie finie

Signal

- Puissance

- Puissance moyenne P du signal x

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

- Énergie finie \Rightarrow puissance moyenne nulle

- $W_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$

- Puissance moyenne finie \Rightarrow énergie infinie

$$0 < P_x < \infty \Rightarrow W_x \rightarrow \infty$$

- Exemple les signaux périodiques

Signal

- Signaux classiques

- Porte

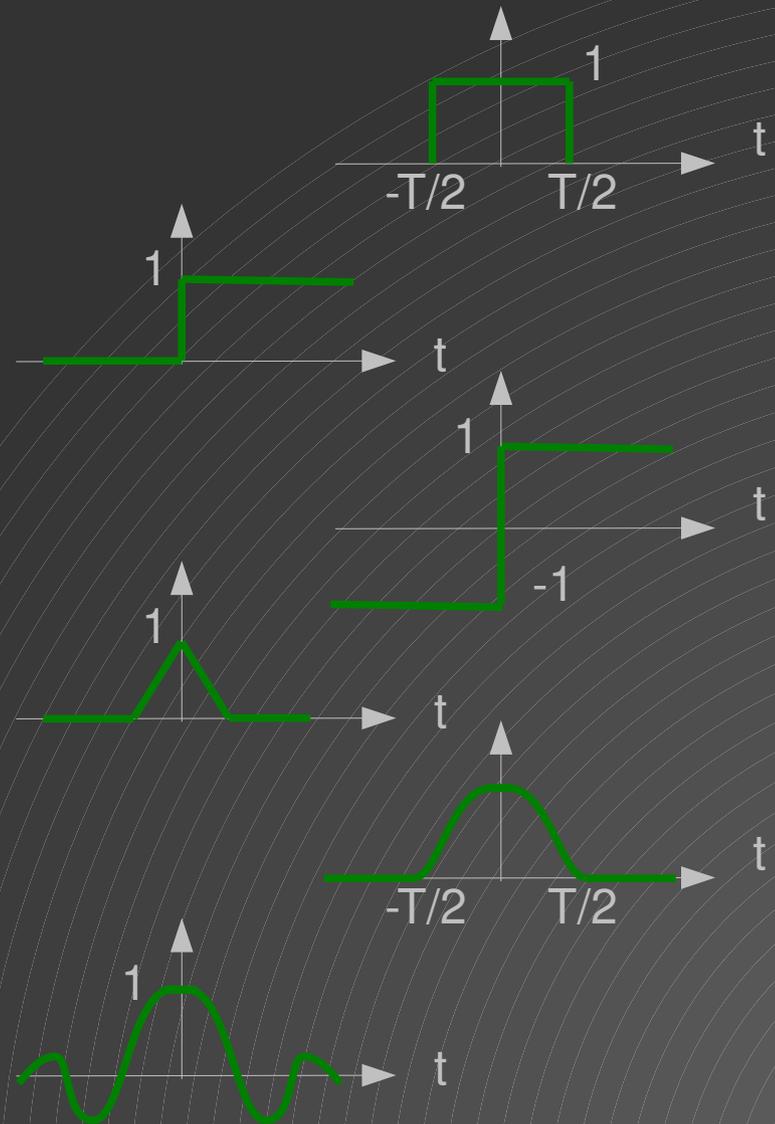
- Echelon d'Heavyside

- Signe

- Triangulaire

- Gaussienne

- Sinus cardinal



Signal

- Signaux classiques

- Porte

- $\Pi_{T/2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

- Echelon d'Heavyside

- $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

- Signe

- $\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

- Triangulaire

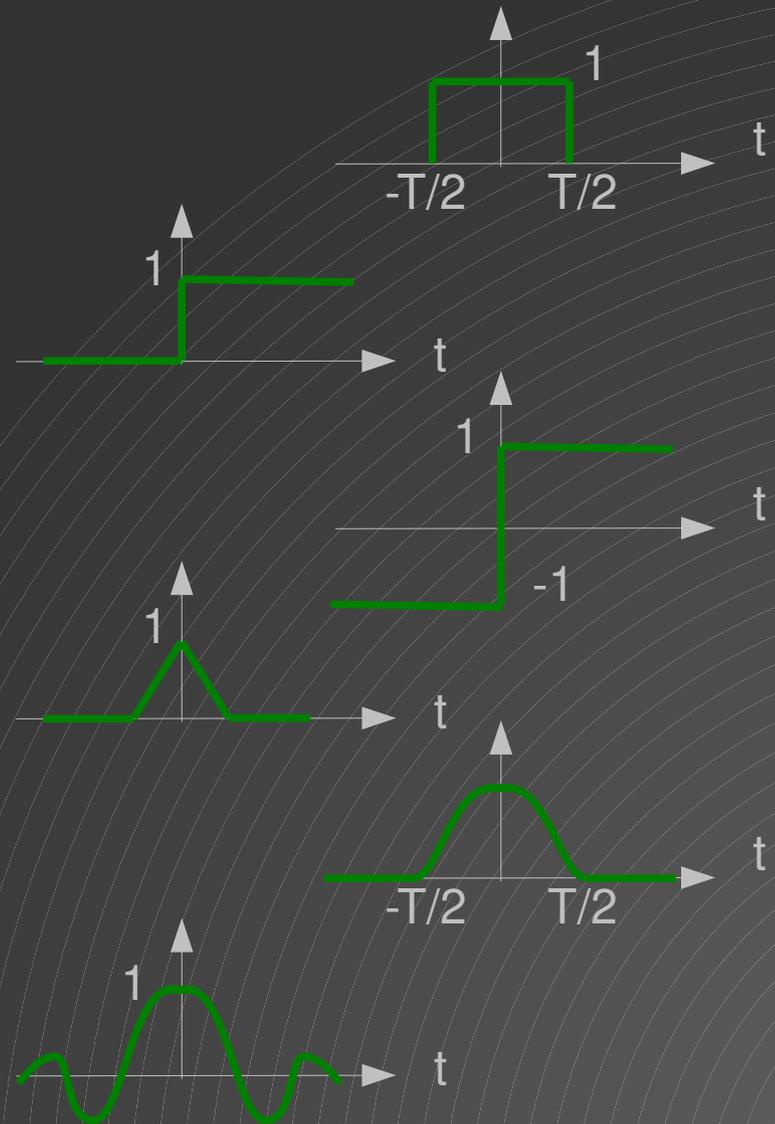
- $\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

- Gaussienne

- $g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

- Sinus cardinal

- $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$



Signal

Séries de Fourier

- On considère les fonctions $g_n(t)$

$$g_n(t) = e^{2j\pi\left(\frac{nt}{T}\right)}$$

- Que vaut :

$$\langle g_n(t), g_m(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T g_n(t) g_m^*(t) dt$$

- Soit $f(t)$ périodique de période T ($T > 0$). Un signal 1D périodique peut être vu comme une somme de sinusoïdes.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n g_n(t)$$

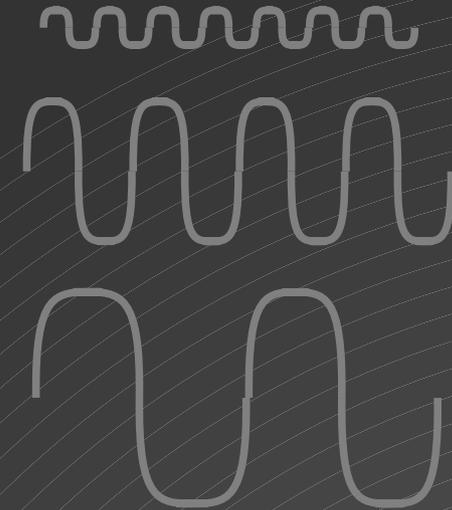
Signal

Séries de Fourier

- Harmoniques

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n g_n(t) \quad C_n : \text{harmoniques}$$

- C_0 : Fréquence continue
- C_1 : Fréquence fondamentale
- ...
- C_n : $n^{\text{ième}}$ harmonique
- f réel $\Rightarrow C_n = C_{-n}^*$ ($f(t) = f^*(t)$)



Signal

Séries de Fourier

- Fréquences
 - Basses fréquences
 - Lentes variations
 - Zones presque uniformes
 - Hautes fréquences
 - Variations rapides
 - Contours/coins



Signal

Séries et transformée de Fourier

- Spectre
 - D'amplitude : $|C_n|$
 - De phase $\text{Arg}(C_n) = \text{arctg}(-b_n/a_n)$
 - De puissance $|C_n|^2$
 - $f(t)$ réel \Rightarrow spectre d'amplitude symétrique
- Relation de PARSEVAL : Il y a conservation de la puissance de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle

Signal

Séries et transformée de Fourier

- On considère jusqu'à présent des signaux périodiques
 - On peut généraliser en prenant $T \rightarrow +\infty$

- On définit TF{x(t)}

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

- On définit TF⁻¹{x(t)}

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+2j\pi ft} df$$

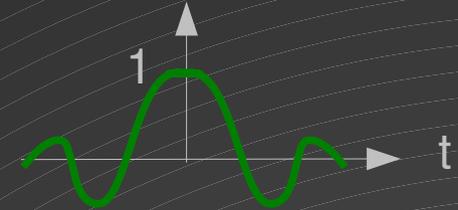
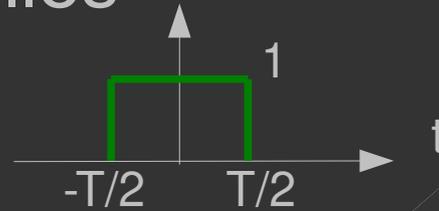
- Toutes les infos contenues dans le signal sont contenues dans le spectre

Signal

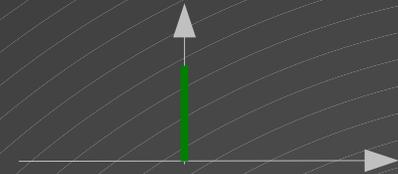
Séries et transformée de Fourier

- Transformées usuelles

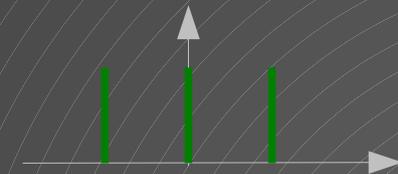
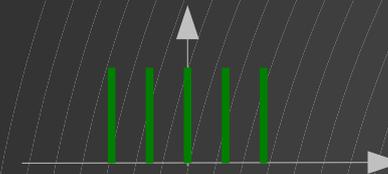
- Porte



- Constante



- Peigne de Dirac



Signal

Séries et transformée de Fourier

- Existence de la transformée de $f(t)$
 - $f(t)$ bornée
 - Intégrale de $f(t)dt$ existe
 - Les discontinuités de $f(t)$ sont en nombre limité

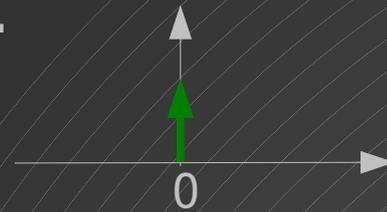
Signal

Séries et transformée de Fourier

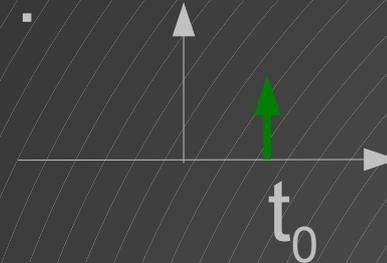
- Propriétés :
 - Linéarité :
 - $K f(t) + g(t) \Leftrightarrow K F(t) + G(t)$ (K complexe)
 - Similitude : Une dilatation dans le domaine temporel correspond à une contraction dans le domaine fréquentiel
 - $f(at) \Leftrightarrow 1/|a| F(f/a)$ (a réel)
 - Dérivée :
 - $dx(t)/dt \Leftrightarrow 2i\pi f X(f)$
 - $dX(f)/df \Leftrightarrow -2i\pi t x(t)$

Filtrage : Transformée de Fourier

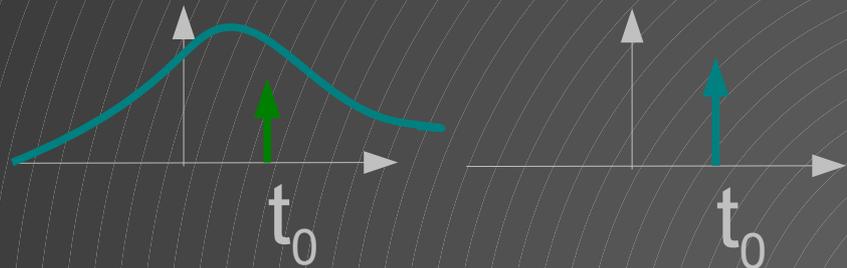
- Dans notre cas :
 - Signal borné et échantillonné
- Soit le pic de Dirac $\delta(t)$:



- Soit le pic de Dirac $\delta(t_0)$:
- $\delta(t_0) = \delta(t-t_0)$



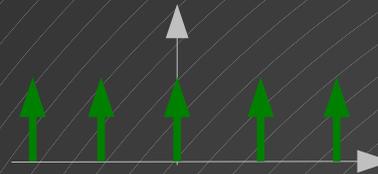
- $f(t) \delta(t_0) = f(t_0)$:



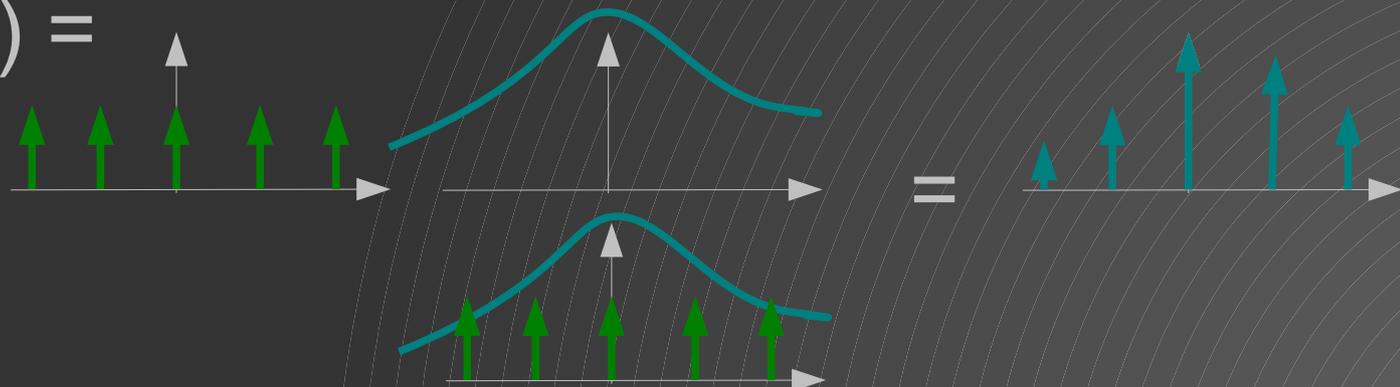
Filtrage : Transformée de Fourier

- Dans notre cas :
 - Signal borné et échantillonné
- Soit le peigne de Dirac $\Psi(t)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



- $f(t) \Psi(t_0) =$



Filtrage : Transformée de Fourier

- Dans notre cas :
 - Signal discret (échantillonné) + support borné
 - TFD

Filtrage : Transformée de Fourier

- TFD : (Signal discret (échantillonné) + support borné)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

$$X(f) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft}$$

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-2j\pi lf_e kT_e}$$

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{\frac{-2j\pi kl}{N}} \quad x(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{\frac{2j\pi lk}{N}}$$

Filtrage : Transformée de Fourier

- TFD : (Signal discret (échantillonné) + support borné)

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-\frac{2j\pi kl}{N}} \quad x(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{\frac{2j\pi lk}{N}}$$

- Notes : (F_e Fréquence d'échantillonnage)
 - $X(0) \rightarrow -2F_e$ (/ 0)
 - $X(N-1) \rightarrow +2F_e$ (/ $+4F_e$)
 - Pas en fréquence : F_e/N

Filtrage : Transformée de Fourier

- Calcul rapide de la TFD
 - FFT (1965 – Cooley et Tukey)

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-\frac{2j\pi kl}{N}}$$

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k) e^{-\frac{2j\pi 2kl}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k+1) e^{-\frac{2j\pi 2(k+1)l}{N}}$$

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k) e^{-\frac{2j\pi 2kl}{N}} + e^{-\frac{2j\pi l}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k+1) e^{-\frac{2j\pi 2kl}{N}}$$

Filtrage : Transformée de Fourier

- FFT :

- $$X(l) = \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k) e^{\frac{-2j\pi 2kl}{N}} + e^{\frac{-2j\pi l}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k+1) e^{\frac{-2j\pi 2kl}{N}}$$

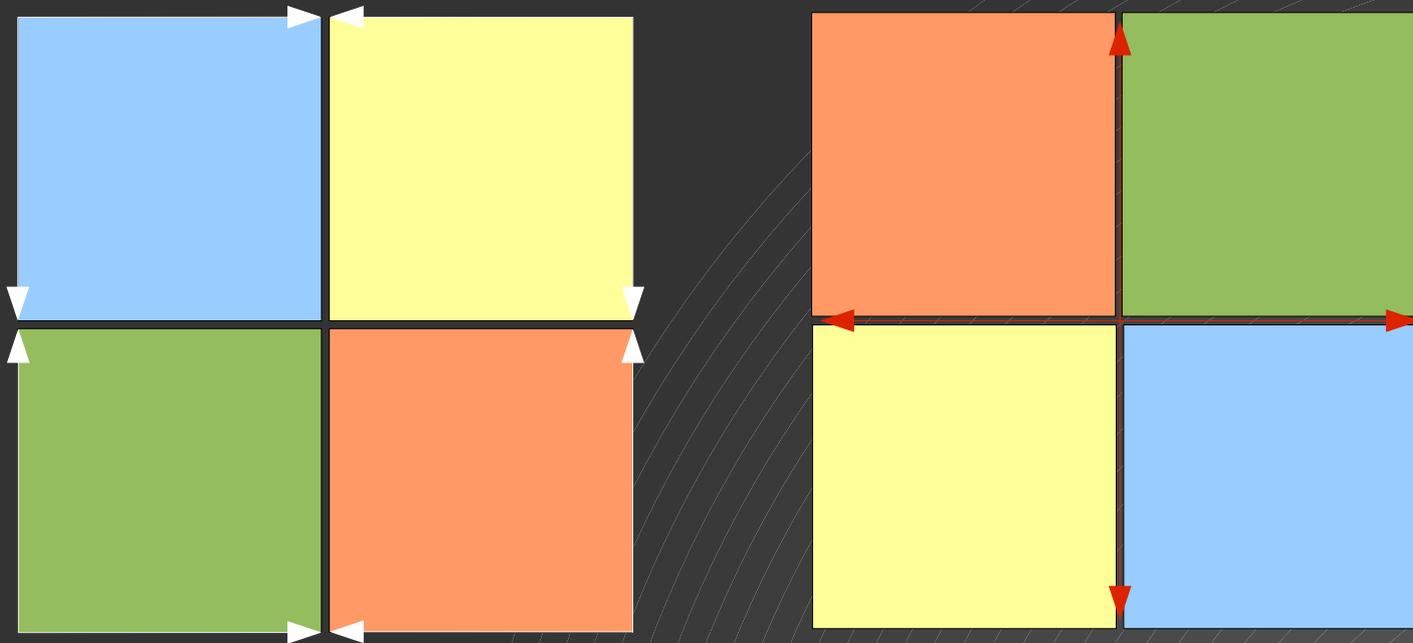
- Pour calculer la TFD sur un signal de taille N, on calcul la transformée de Fourier sur les coefficients pairs (N/2) et la transformée de Fourier sur les coefficients impairs (N/2) ... et récursivement

Filtrage : Transformée de Fourier

- Dans notre cas (image)
 - Signal 2D : TF2D

Filtrage : Transformée de Fourier

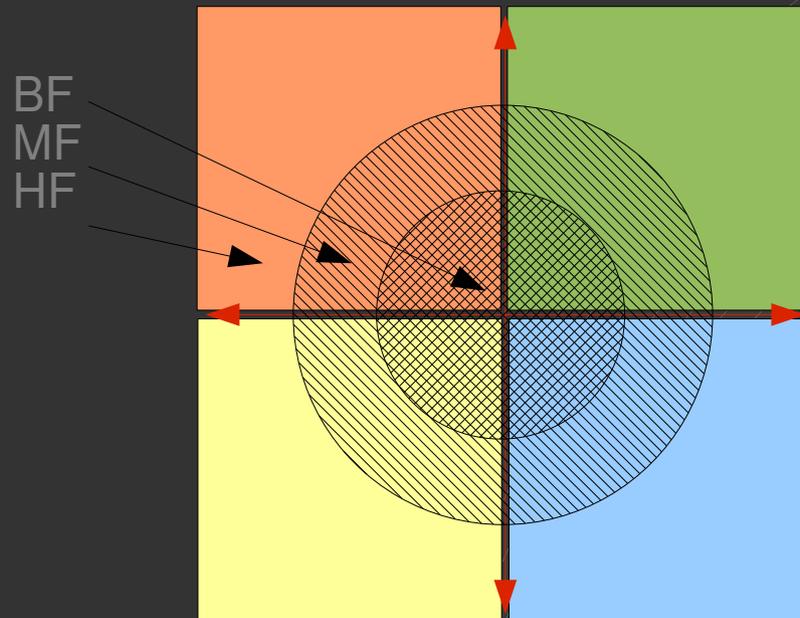
- Visualisation du spectre :



- On interverti les cadrants. Les basses fréquences se retrouvent au centre

Filtrage : Transformée de Fourier

- Visualisation du spectre :



Signal

La convolution



La réponse du filtre est donnée par un produit de convolution

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h(t-u) du$$

Signal

La convolution

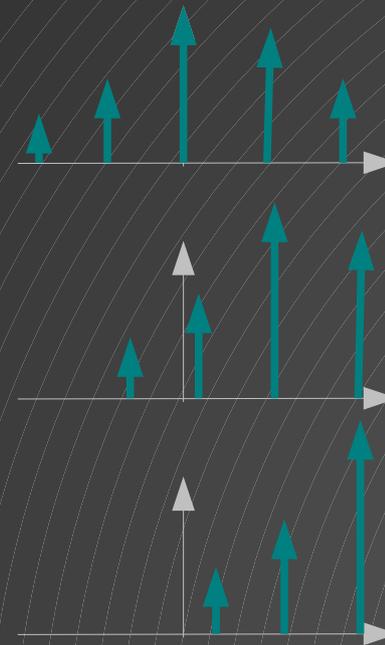
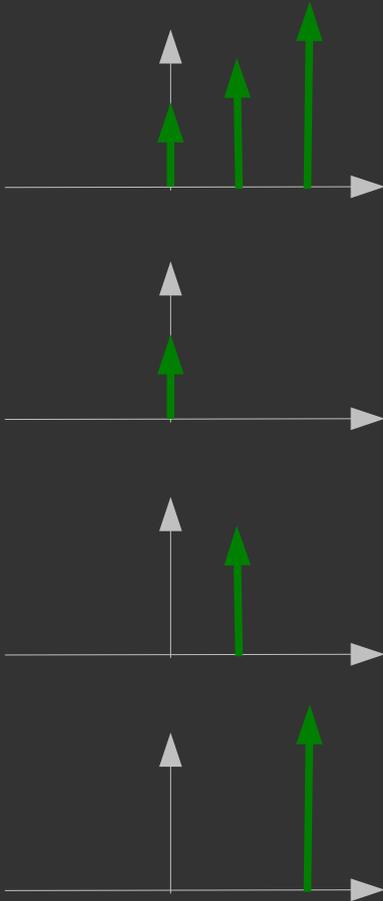
- Réponse impulsionnelle :



Signal

La convolution

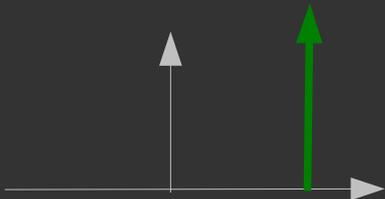
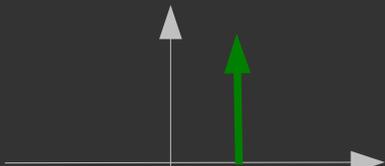
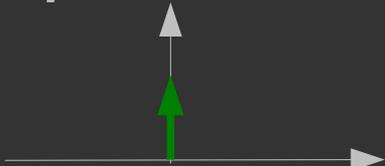
- Réponse :



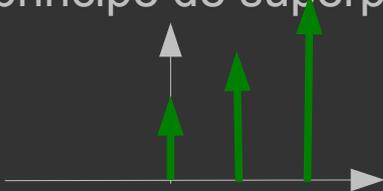
Signal

La convolution

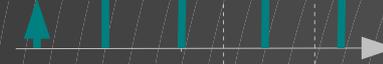
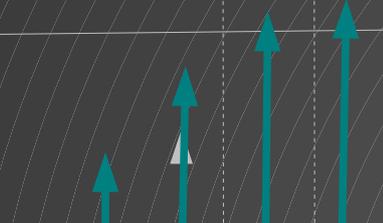
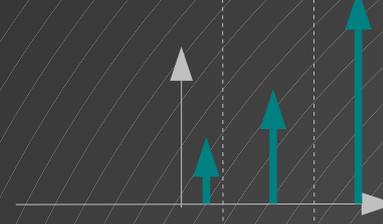
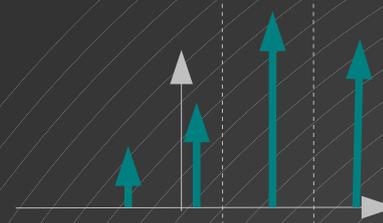
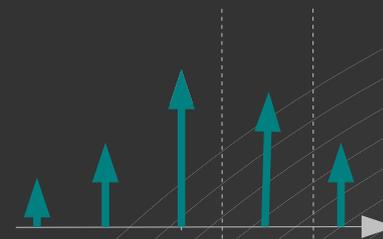
- Réponse :



Par le principe de superposition :



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u) du$$



Signal

La convolution

- Propriétés :
 - Commutative : $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$
 - Distributive : $(x(t) + y(t)) * g(t) = x(t) * g(t) + y(t) * g(t)$
 - Associative : $(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$

Signal

La convolution

- Théorème de Plancherel :

Temps	Fréquences
Convolution *	Multiplication ·
Multiplication ·	Convolution *

- Autre propriété :
 - $f' * g = f * g' = (f * g)'$

Signal

La convolution

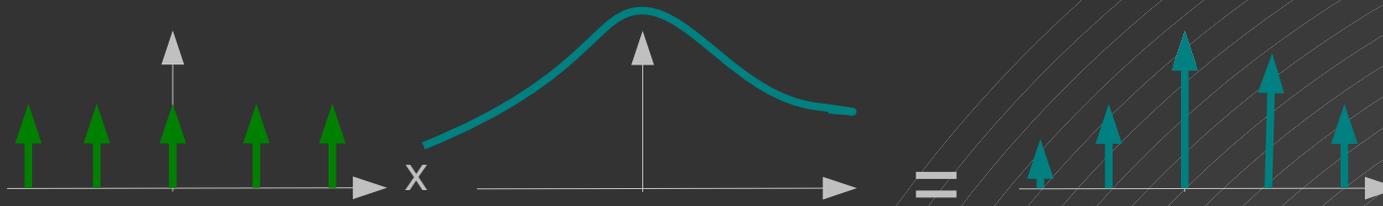
- Conséquence du lien convolution \leftrightarrow multiplication
 - Spectre d'un signal échantillonné
 - Revisite du filtrage :
 - Passe haut
 - Passe bas
 - Passe Bande
 - Réjecteur
 - Déconvolution
- Autres conséquences
 - DoG - Différence de gaussiennes
 - LoG - Laplacien d'une gaussienne

Signal

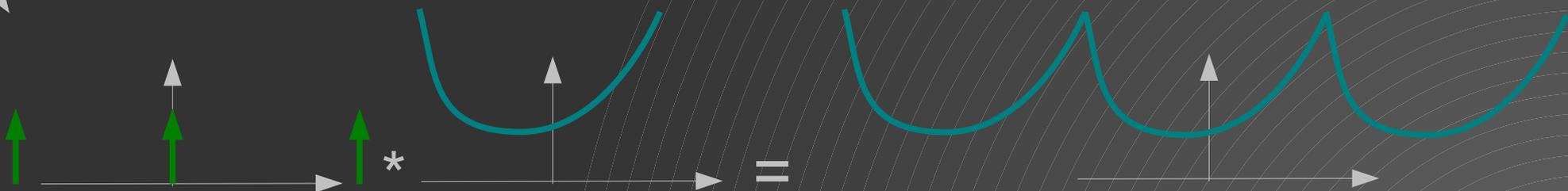
Conséquence du lien convolution \leftrightarrow multiplication

- Spectre d'un signal échantillonné

$$f(t) \text{ } \Downarrow(t_0) =$$



Dans le domaine fréquentiel :

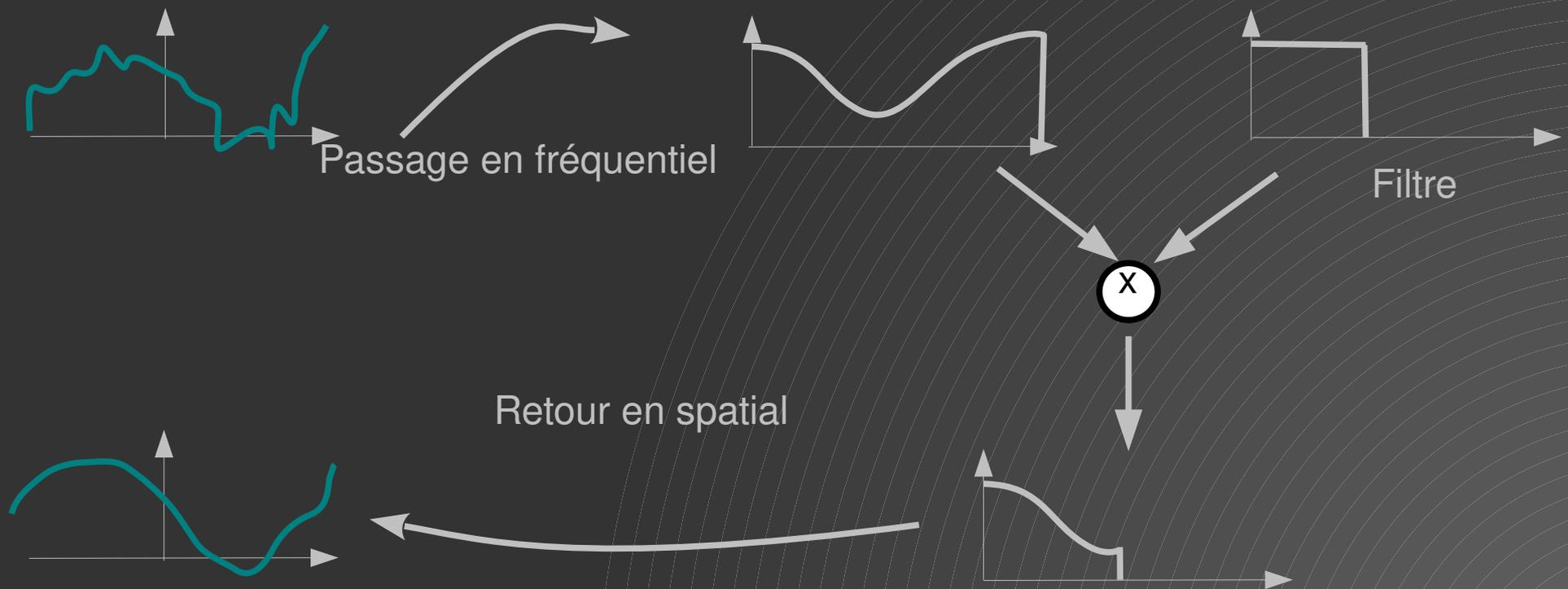


Signal

Conséquence du lien convolution \leftrightarrow multiplication

- Revisite du filtrage :

Passé haut / Passé bas / Passé Bande / Réjecteur

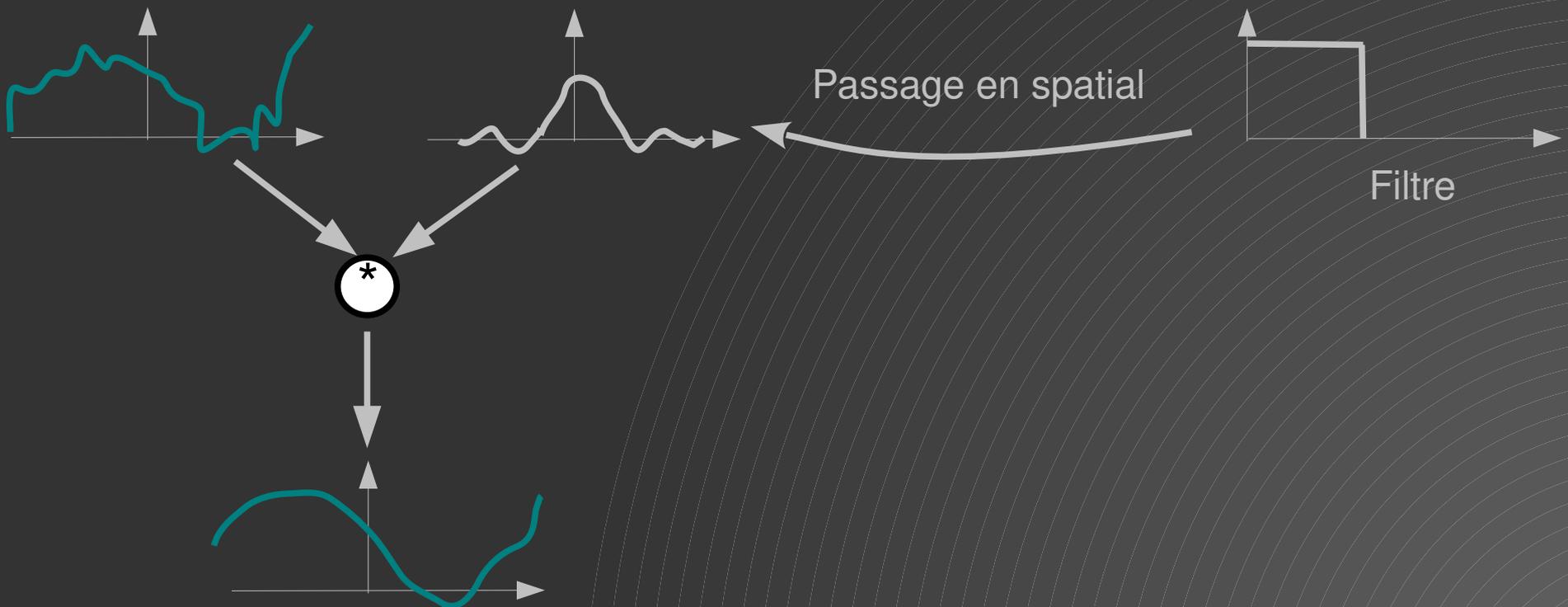


Signal

Conséquence du lien convolution \leftrightarrow multiplication

- Revisite du filtrage :

Passé haut / Passé bas / Passé Bande / Réjecteur



Signal

Conséquence du lien convolution \leftrightarrow multiplication

- Convolution :
 - $f * h \Rightarrow F \times H$
- Déconvolution
 - F/H
 - Très difficile si on ne connaît pas le filtre initial
 - Problème des 0 (ou des valeurs très petites dans H)

Signal

Conséquence du lien convolution \leftrightarrow multiplication

- Détection de bord
 - $(f * \text{gauss})' \rightarrow f * \text{gauss}'$ (la dérivée de la gaussienne est connue formellement)
- LoG
 - Laplacien d'une gaussienne
- DoG
 - Différence de gaussienne

Filtrage

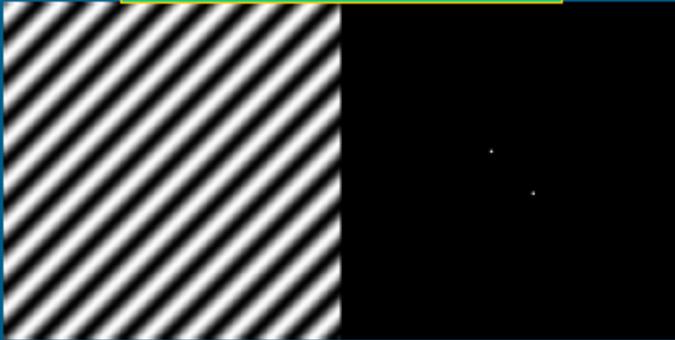
- Passe Bas
 - Description :
 - Coef central supérieur ou égal aux autres
 - Autres coefs positifs
 - Effet :
 - Pixel central devient une moyenne pondérée des voisins
 - Les régions homogènes sont peu changées
 - Les frontières sont étalées
 - Réduit le bruit
- Passe Haut
 - Description :
 - Coef central positif et élevé
 - Autres coefs petits, négatifs ou nuls
 - La somme des coefficients est nulle
 - Effet :
 - Zones homogènes : perte de la notion d'intensité
 - Frontières sont renforcées

Filtrage

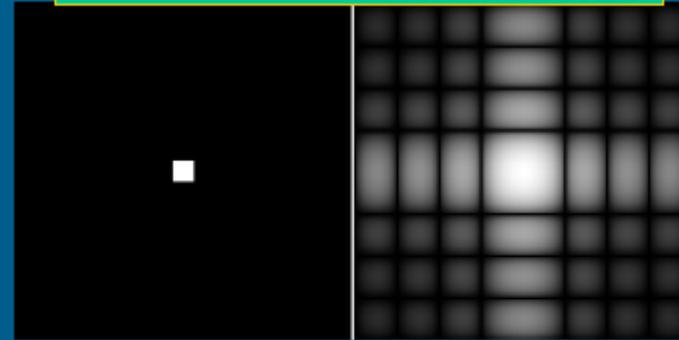
Propriétés de la TF2D

Filtrage

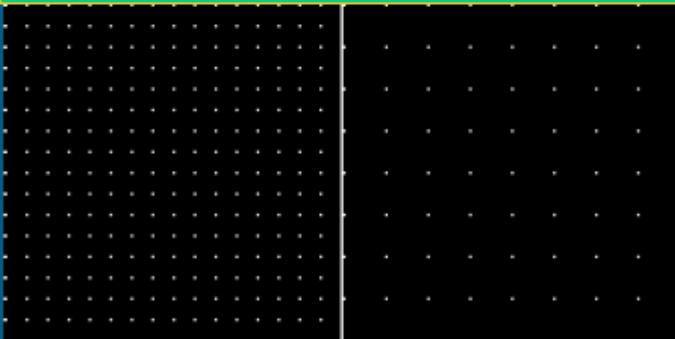
Sinusoïde → "dirac"



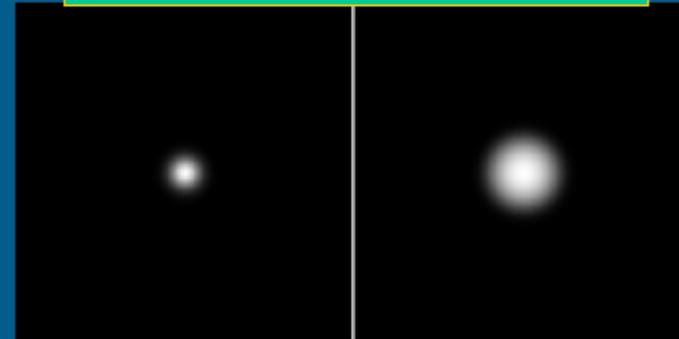
Rectangle → Sinus cardinal



Impulsions : peigne de "diracs"

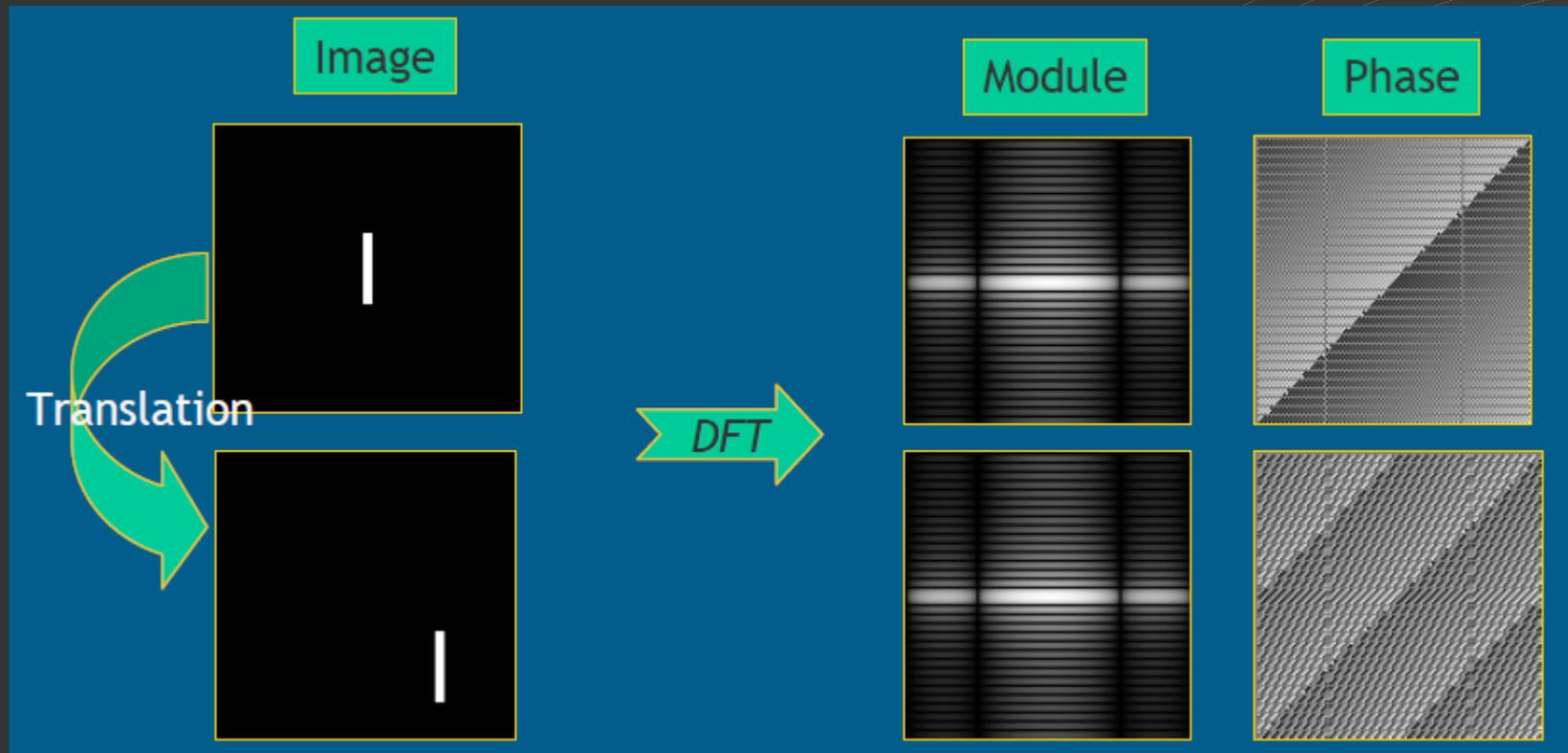


Gaussienne → Gaussienne



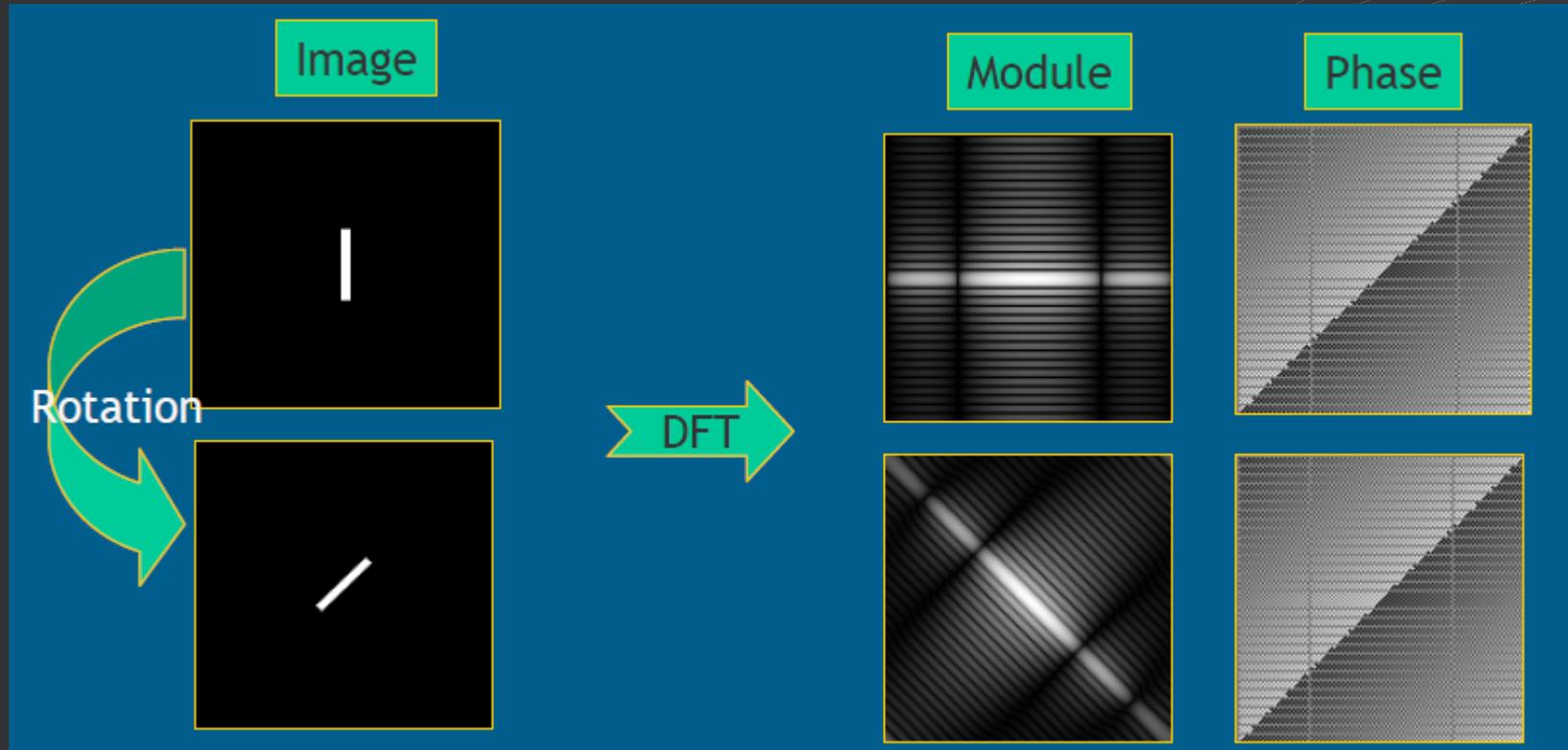
Illustrations
J.L. Lamotte
Séverine Dubuisson

Filtrage



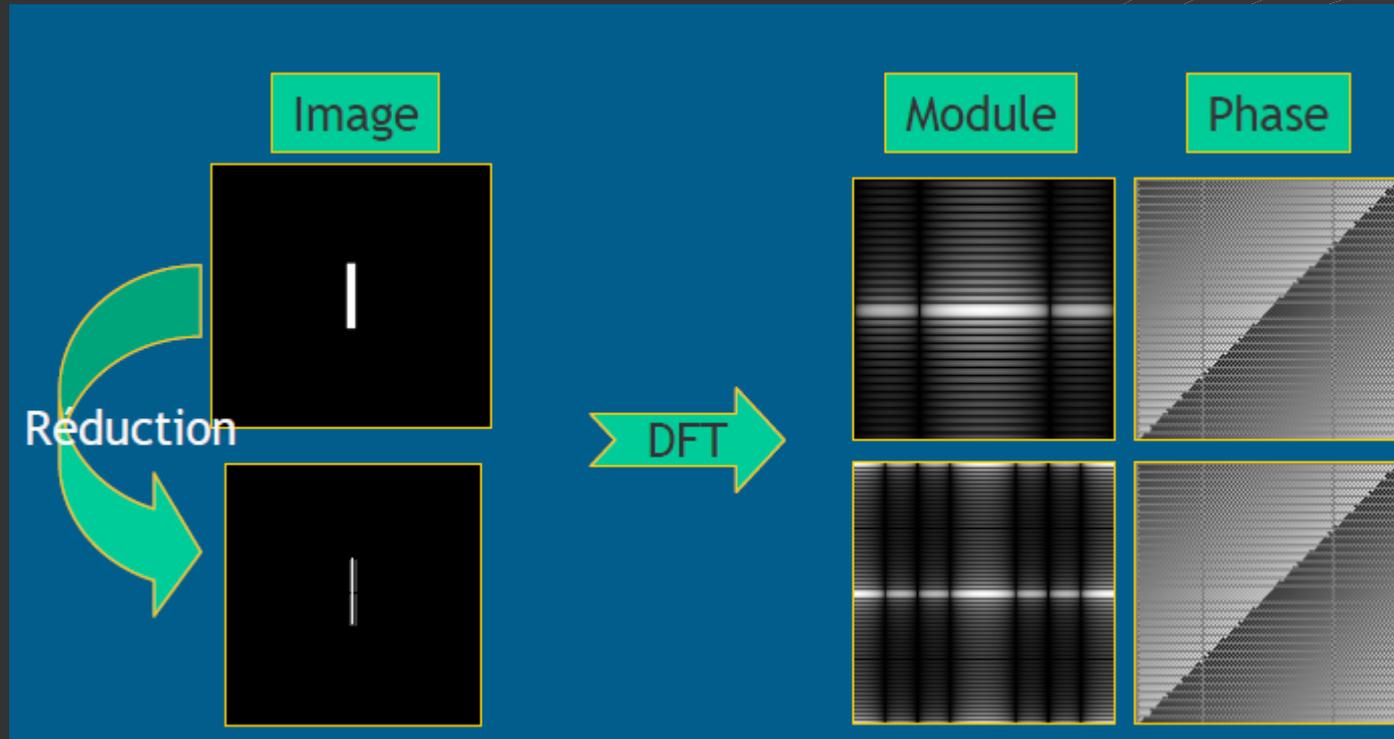
Illustrations
J.L. Lamotte
Séverine Dubuisson

Filtrage



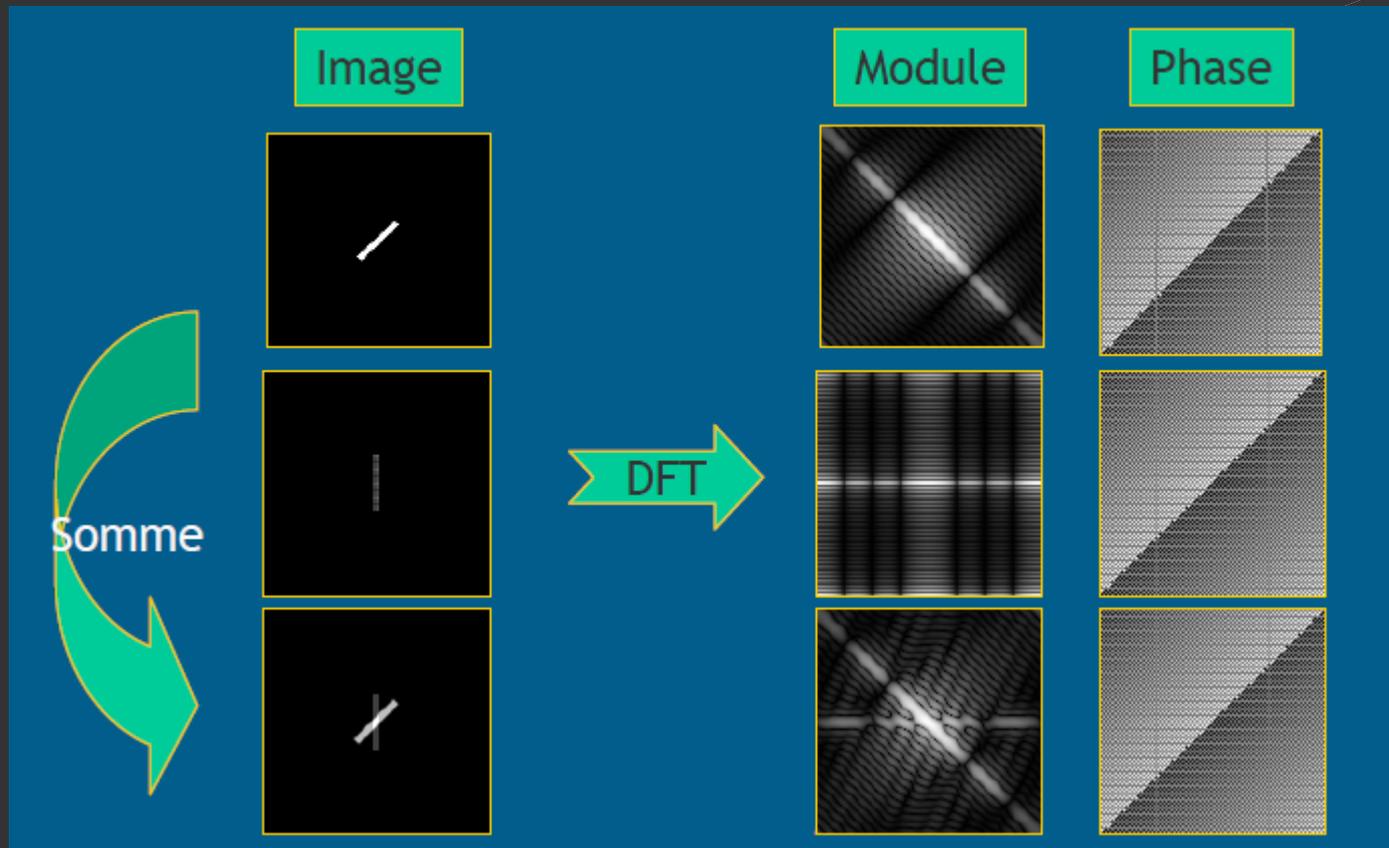
Illustrations
J.L. Lamotte
Séverine Dubuisson

Filtrage



Illustrations
J.L. Lamotte
Séverine Dubuisson

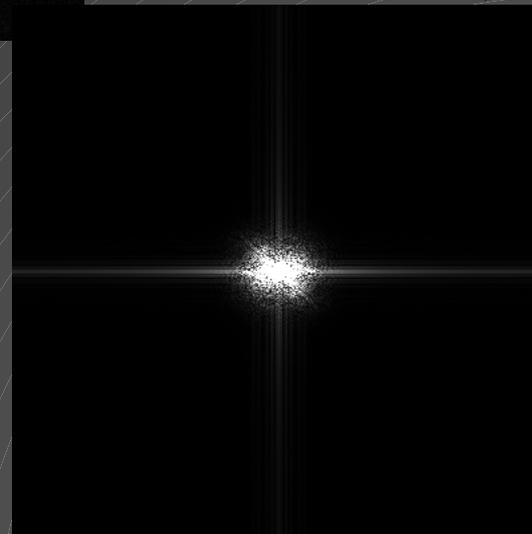
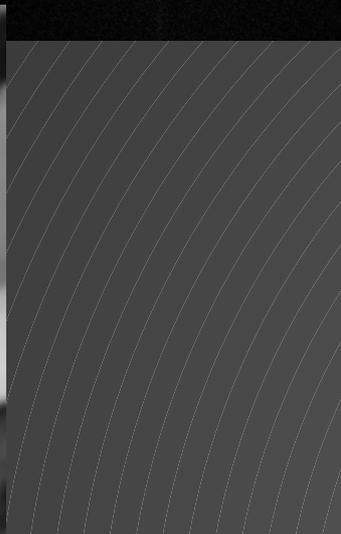
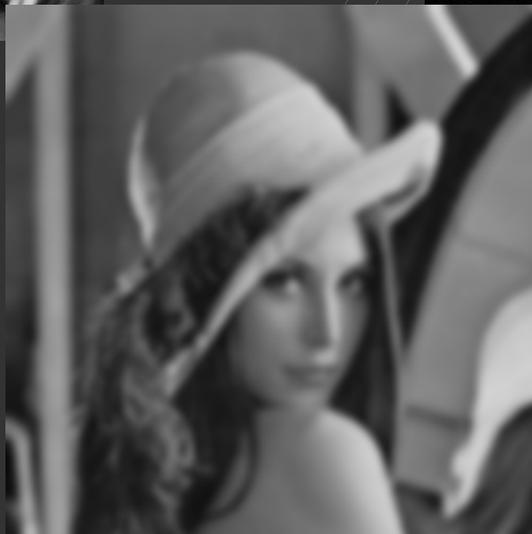
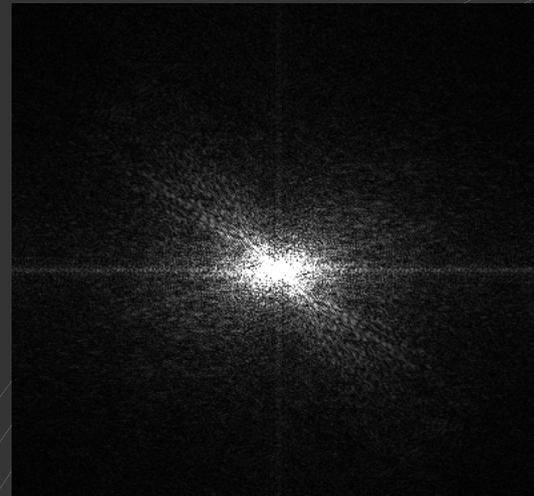
Filtrage



Illustrations
J.L. Lamotte
Séverine Dubuisson

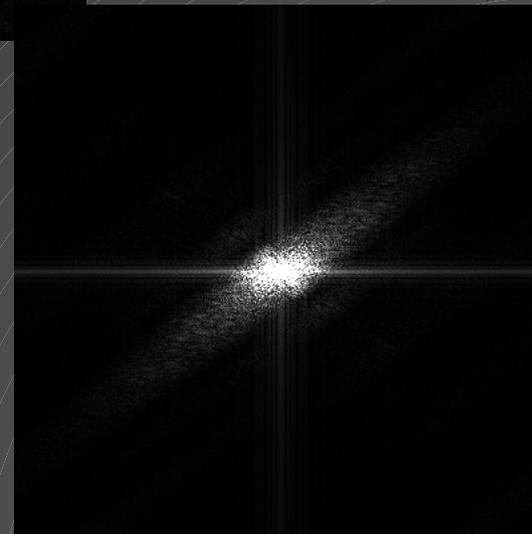
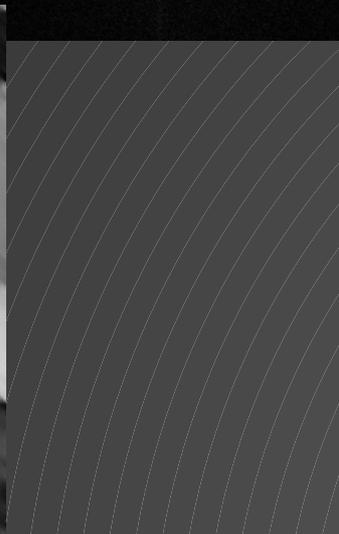
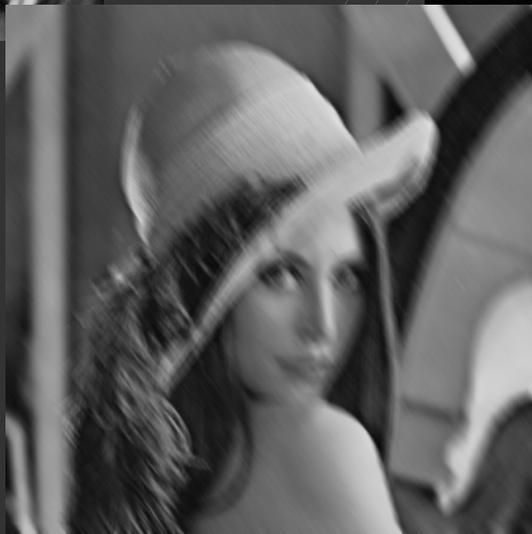
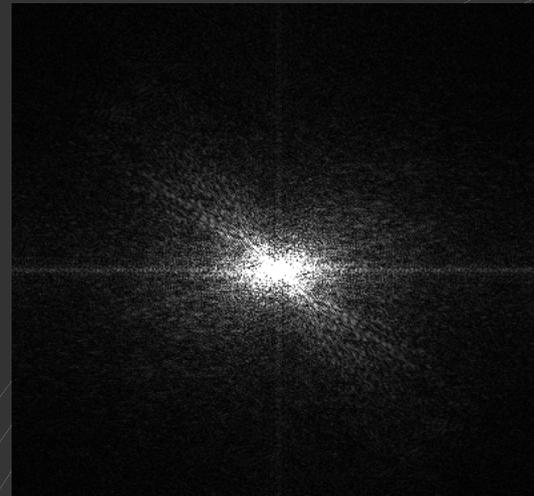
Transformée de Fourier

- Impact du flou



Transformée de Fourier

- Impact du flou



Signal

Autres transformations

- Short Term Fourier Transform
- Discret Cosinus Transform
- Ondelettes
- Radon
- Wigner
- Hilbert
- ...

Signal

Autres transformations

- DCT
 - Transformée en cosinus discrète
 -

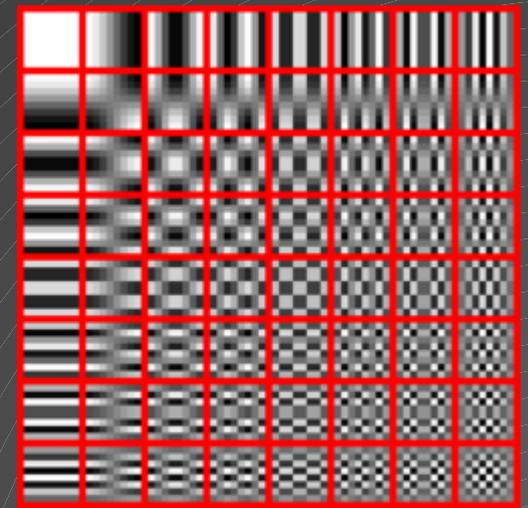


Image wikipedia

Signal

Autres transformations

- Short Term Fourier Transform
 - Problème :
 - FT : soit le temps, soit la fréquence
 - Solution : Ne considérer que des petits intervalles

$$X(f, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w^c(t-t') e^{-2j\pi ft} dt$$

- Impact de la taille de w
 - W étroit \Rightarrow localisation temporelle correcte mais mauvaise résolution fréquentielle
 - W large \Rightarrow localisation temporelle imprécise mais bonne résolution fréquentielle

Signal

Transformée en ondelettes

- Avantage :
 - FT : soit le temps, soit la fréquence
 - STFT : Difficulté de régler la taille de w et taille fixée une fois pour toutes.
 - Transformée en ondelettes :
 - Représentation temps-fréquence
 - la fréquence avec sa position spatiale
 - Adaptation de la résolution en fonction de la fréquence
 - Basses fréquences → Privilégie la résolution fréquentielle
 - Hautes fréquences → Privilégie la résolution temporelle
 - Analyse des signaux non stationnaires

Signal

Transformée en ondelettes

- Définition :

$$\Psi_x^\psi(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t) \psi^c\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt$$

$$\Psi_x^\psi(\tau, s) = \int x(t) \psi_{\tau, s}^c(t) dt$$

$$\psi_{(\tau, s)} = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

Signal

Transformée en ondelettes

- Exemples

- Haar
- Mexican Hat
- Morlet



Ondelette de Haar
Soure : wikipedia

Signal

Autres transformations

- Usage
 - Compression
 - Filtrage
 - Approximation
 - ...

Fin