La synthèse d'images

- Rappels -

Jonathan Fabrizio

http://jo.fabrizio.free.fr

Version : Wed Feb 17 13:08:32 2021

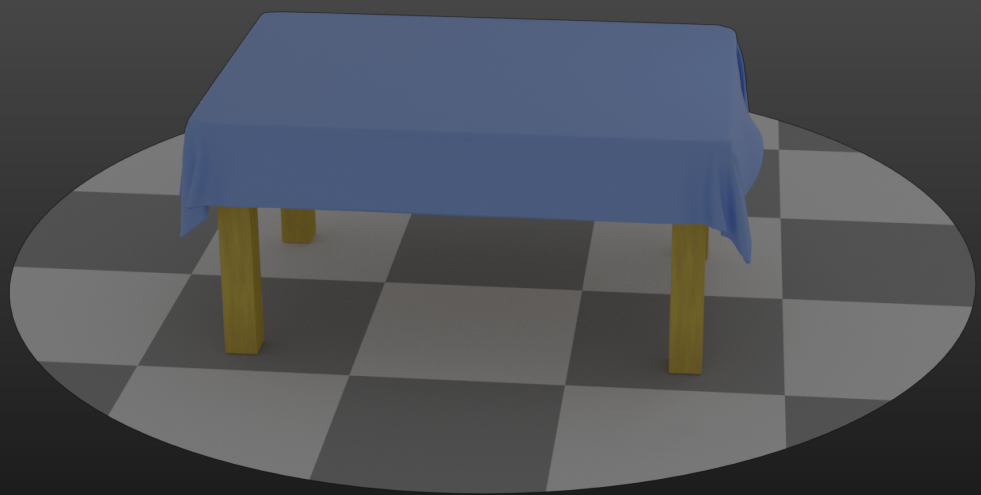
Rappels

Optique et image
Mathématiques : géométrie euclidienne et projective

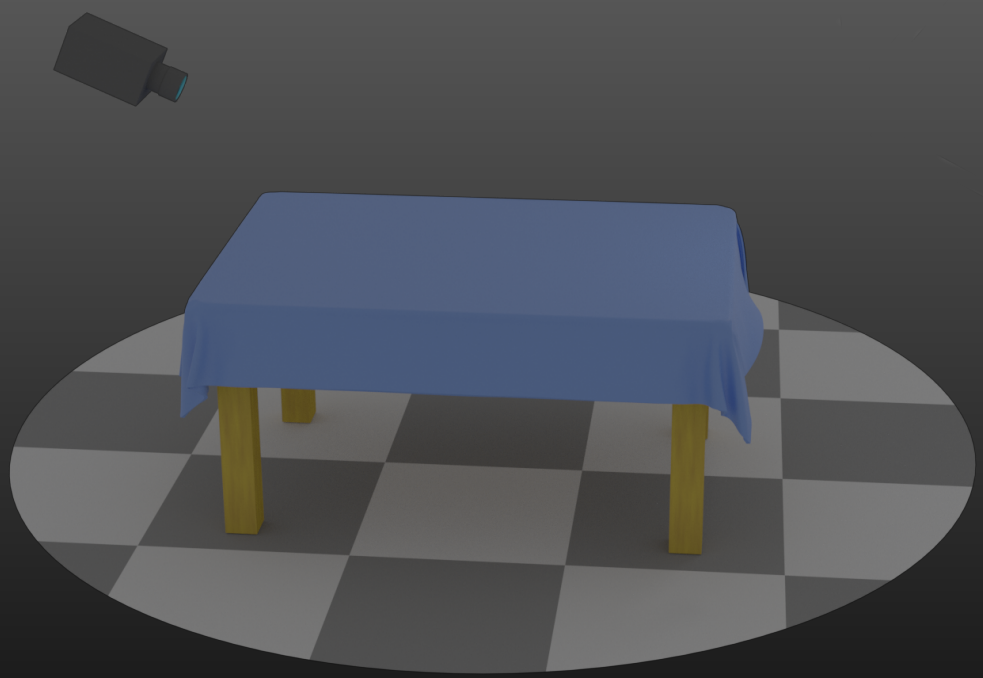
Rappels

Optique et image

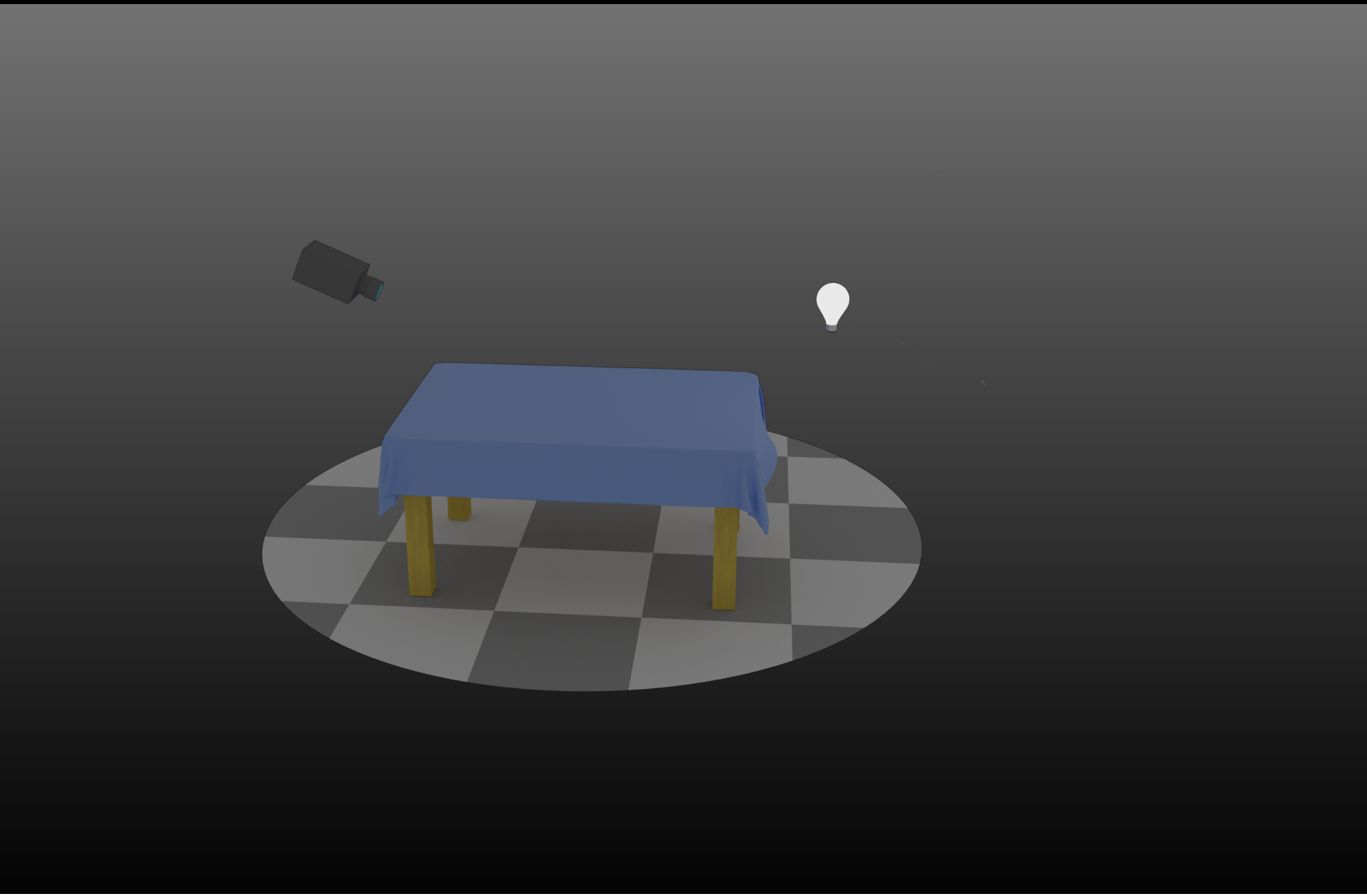
Formation de l'image



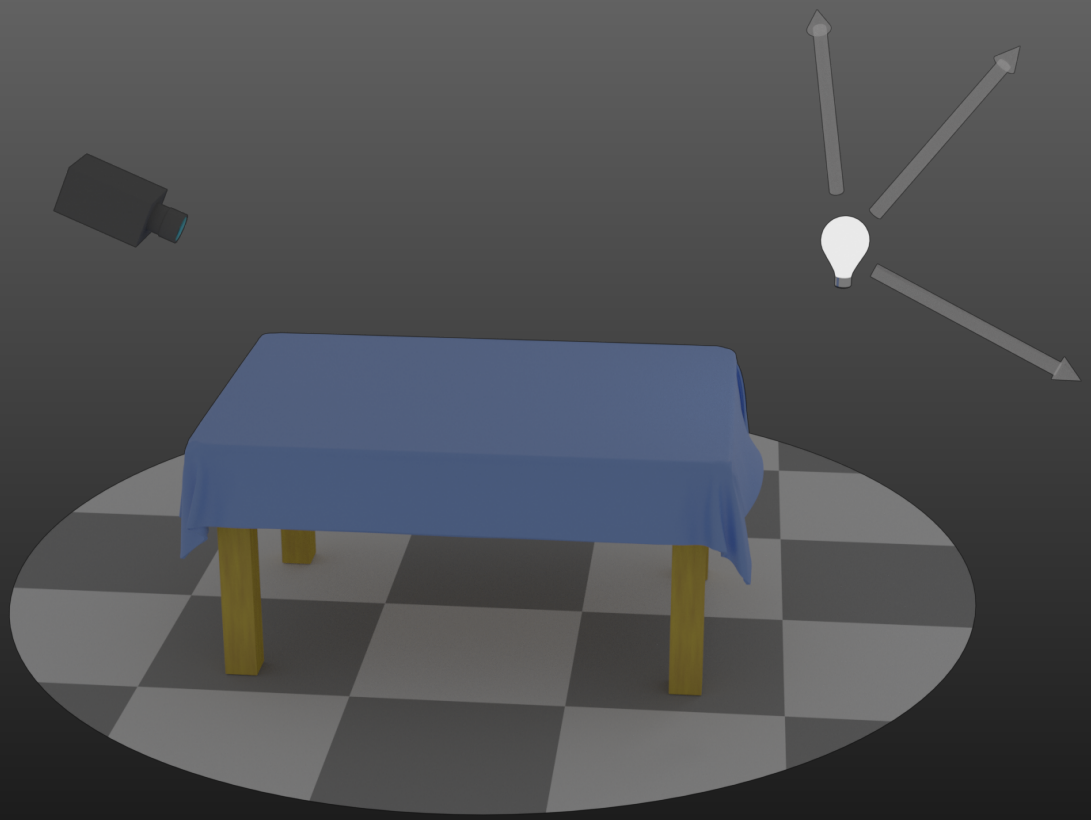
Formation de l'image



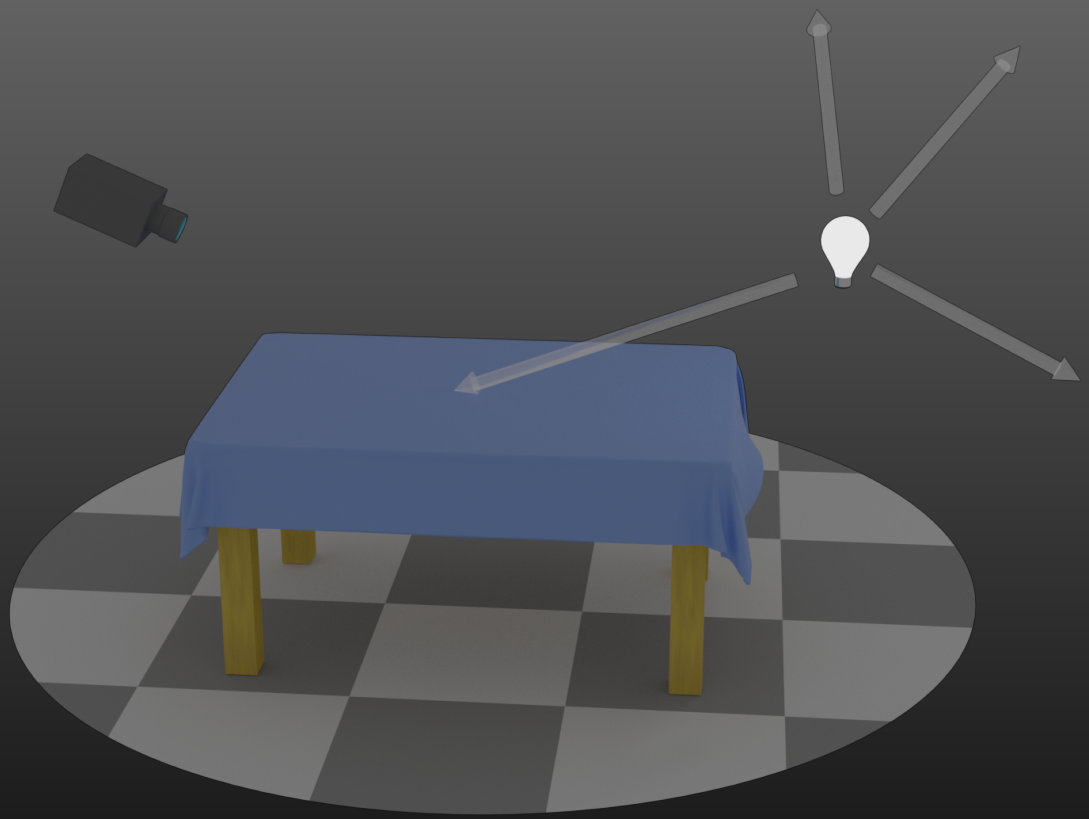
Formation de l'image



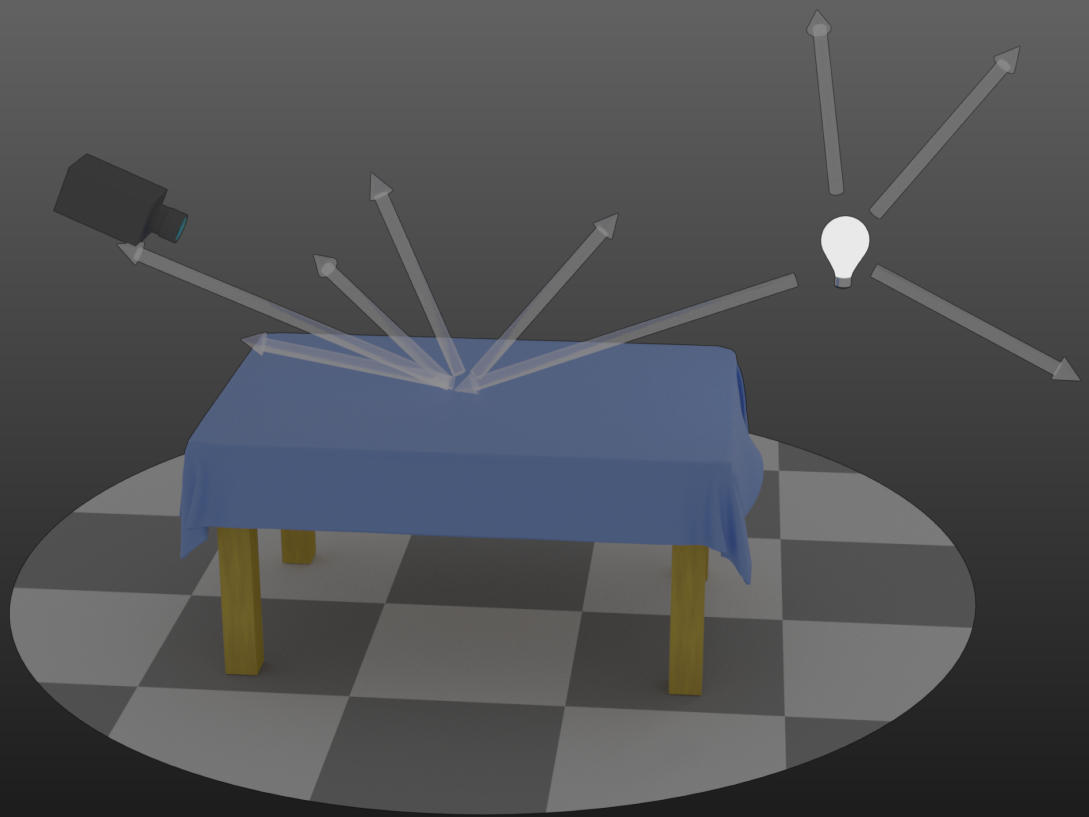
Formation de l'image



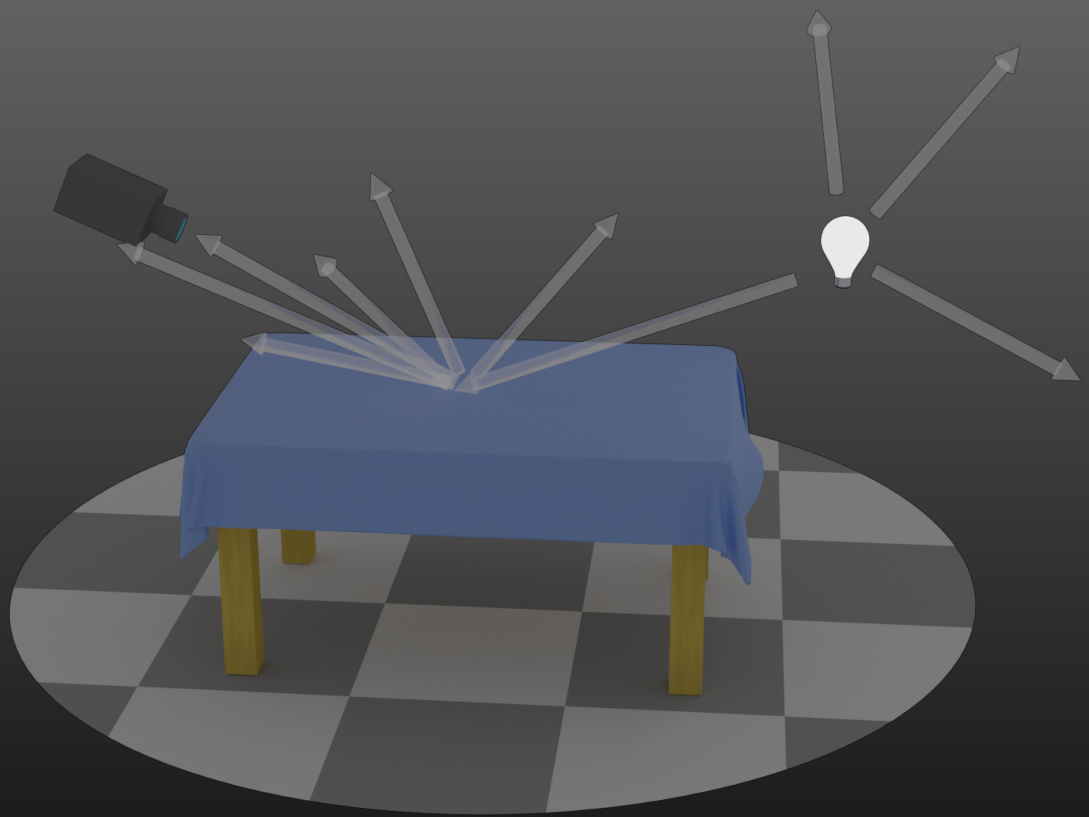
Formation de l'image



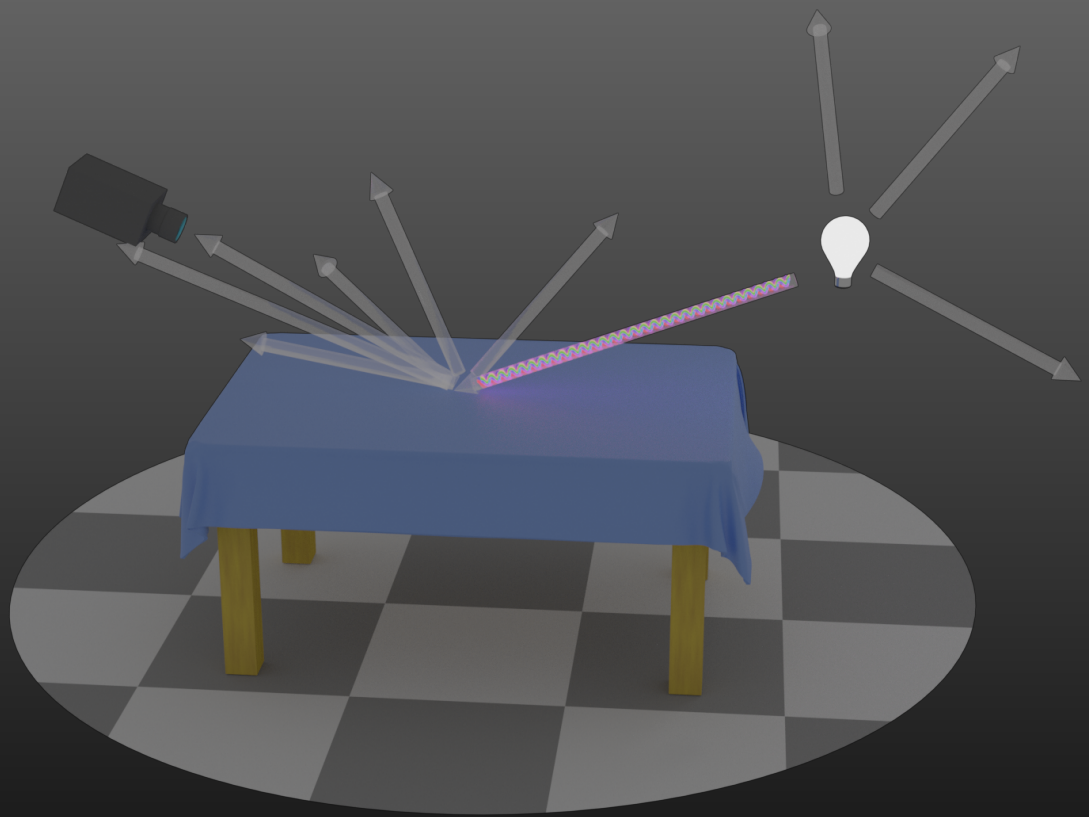
Formation de l'image



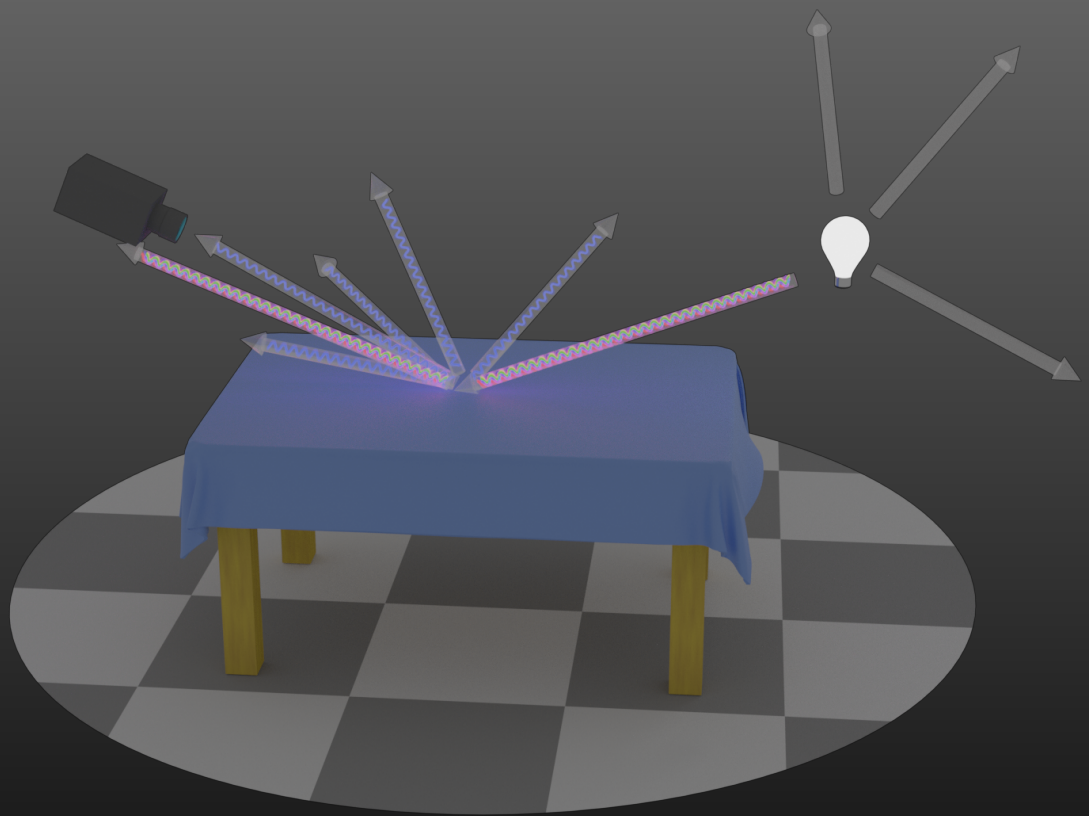
Formation de l'image



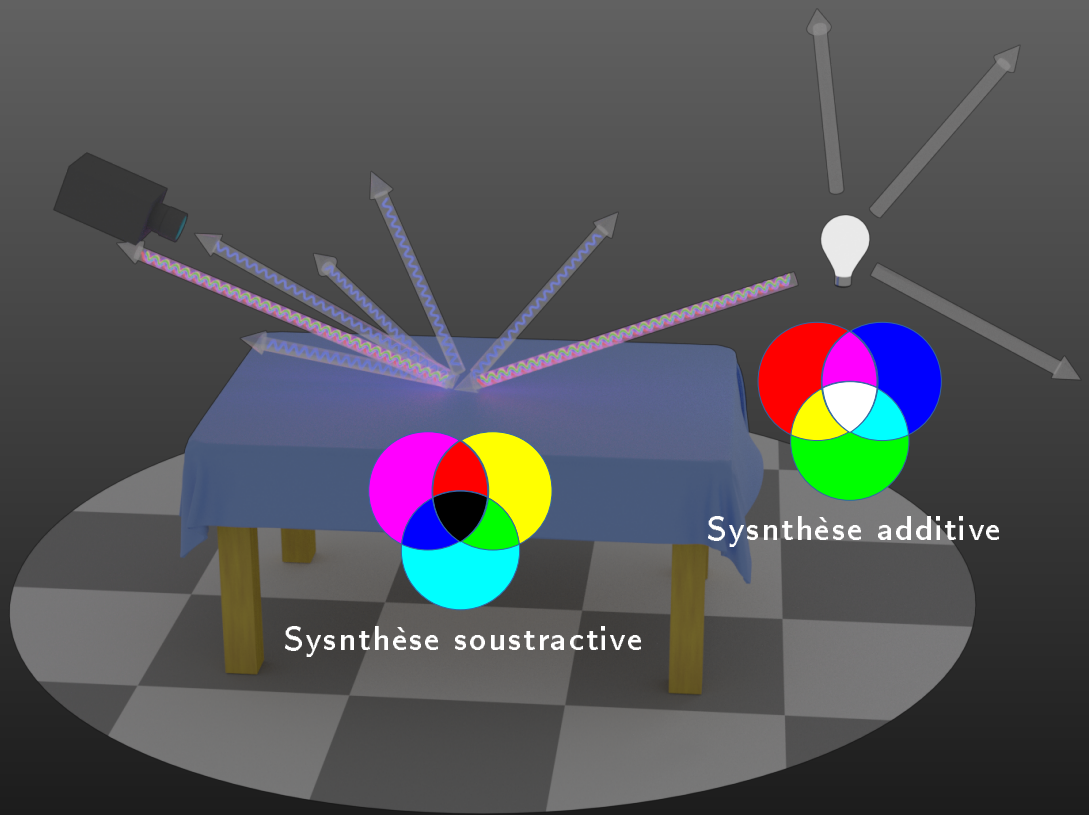
Formation de l'image



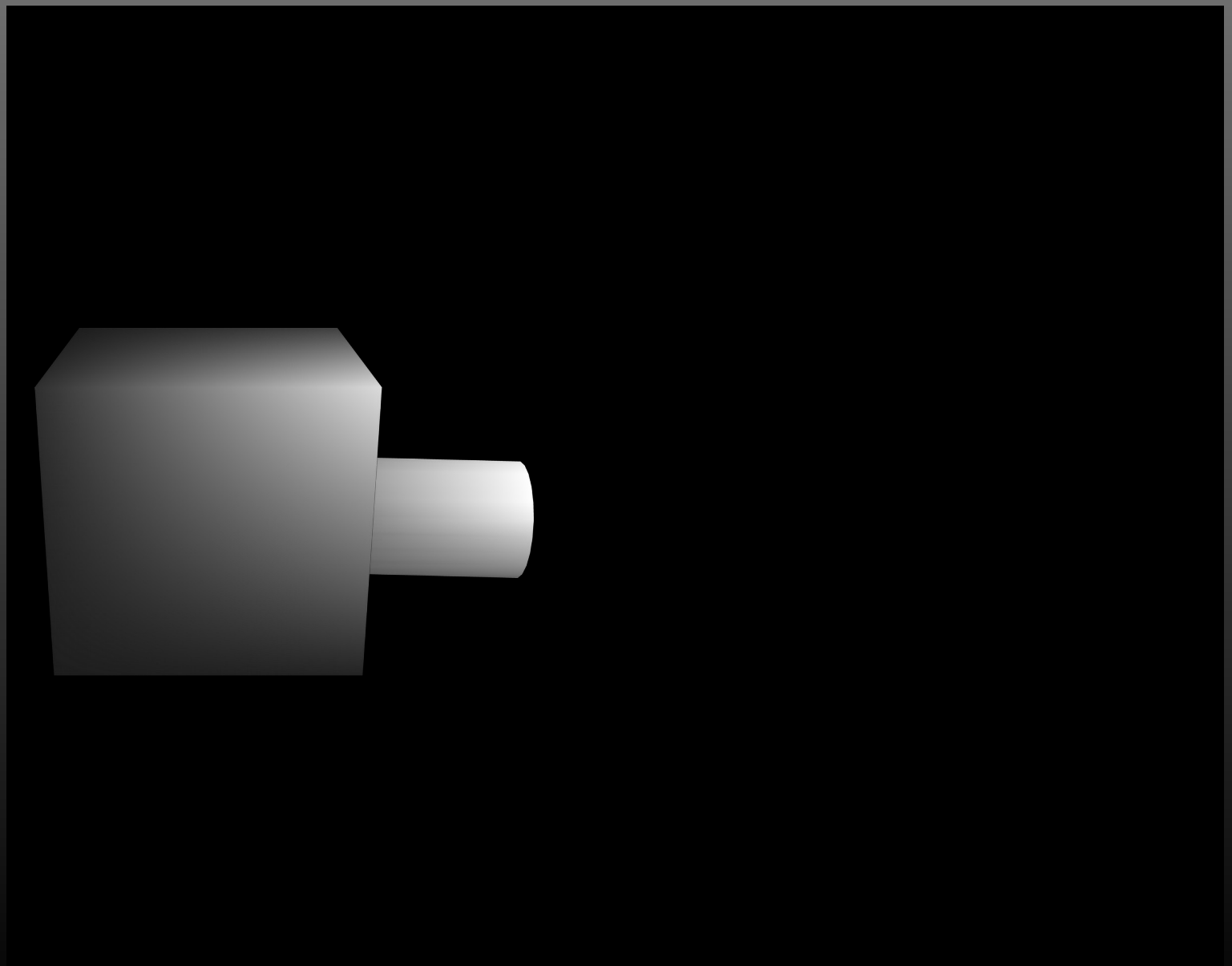
Formation de l'image



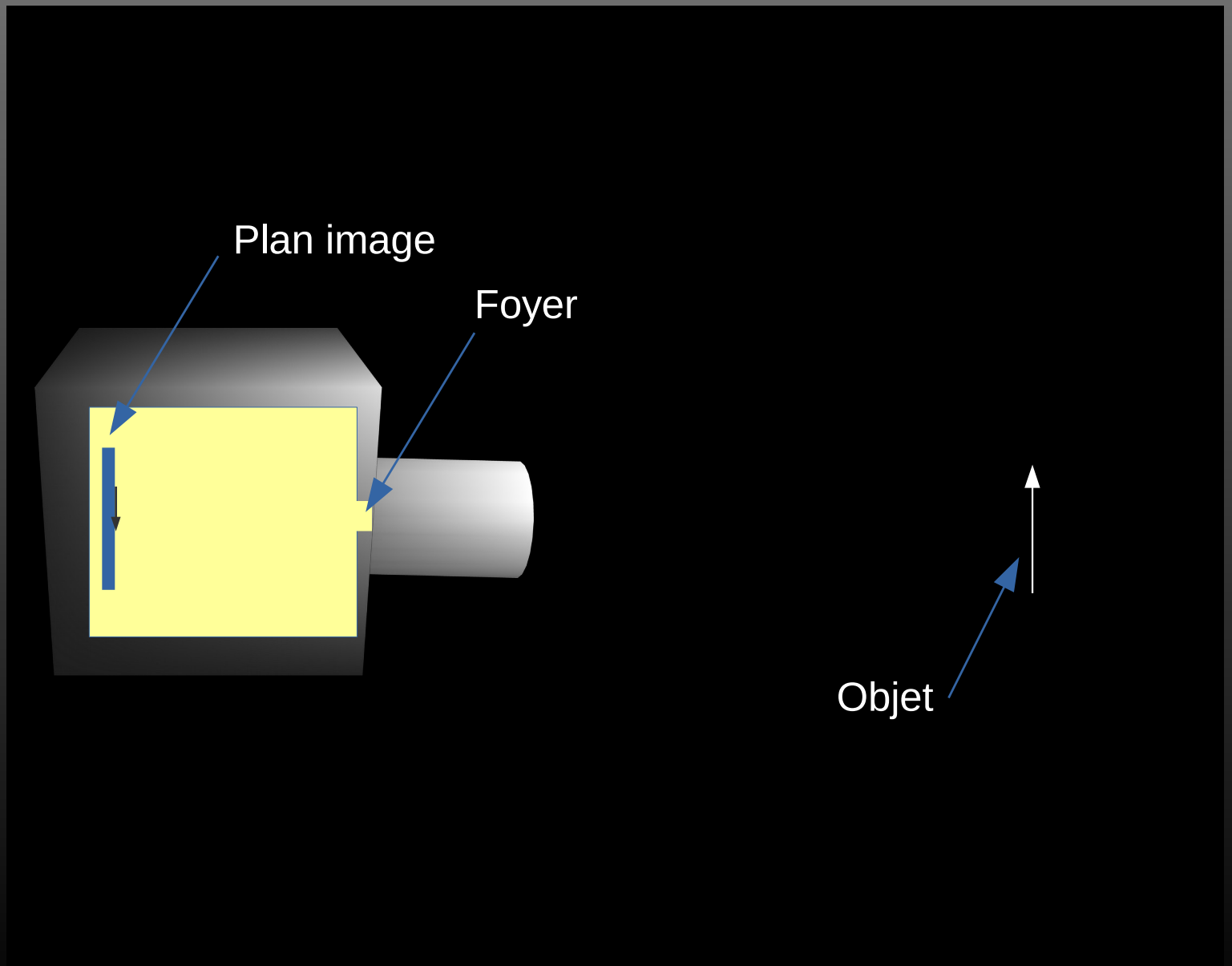
Formation de l'image



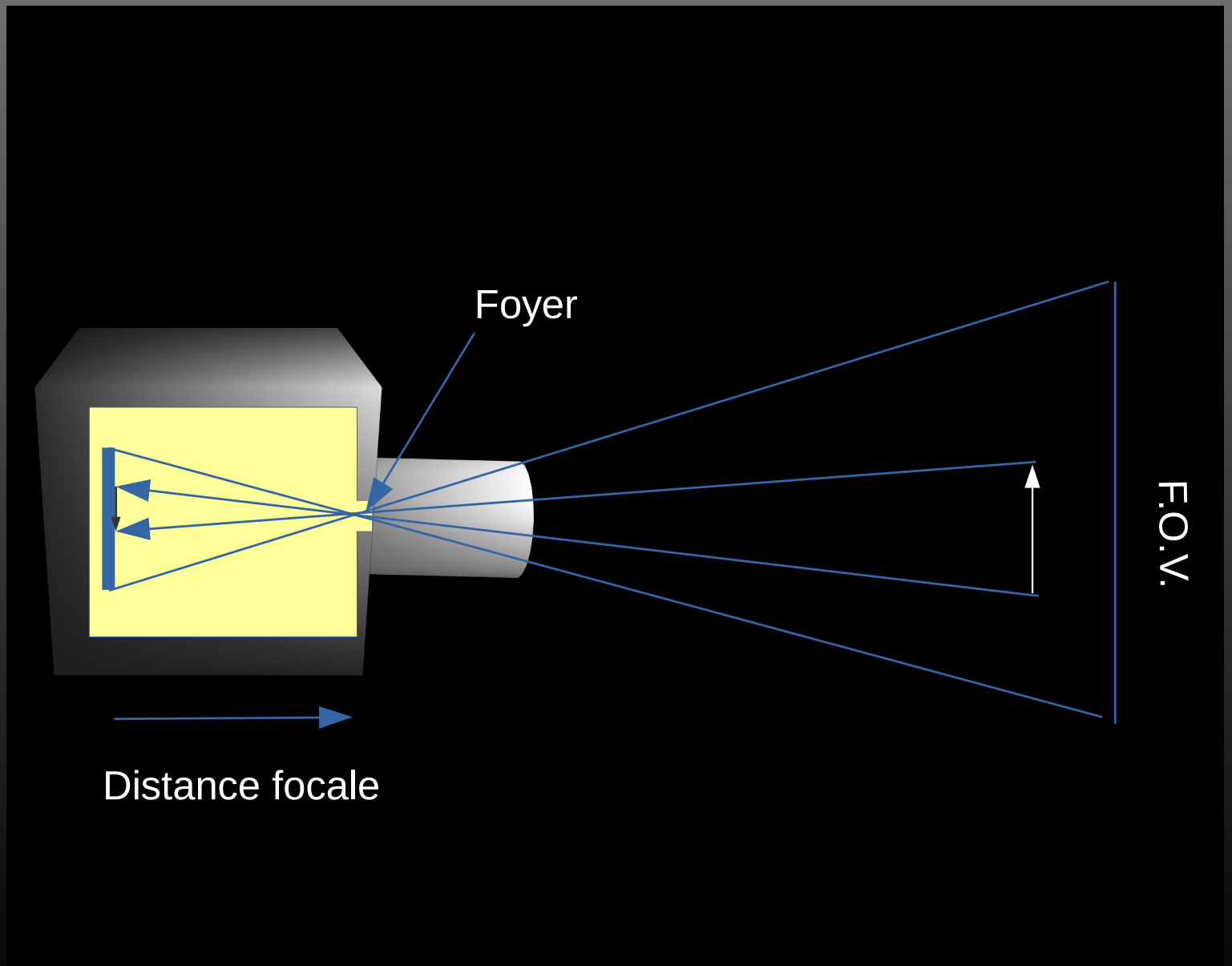
Capture de l'image



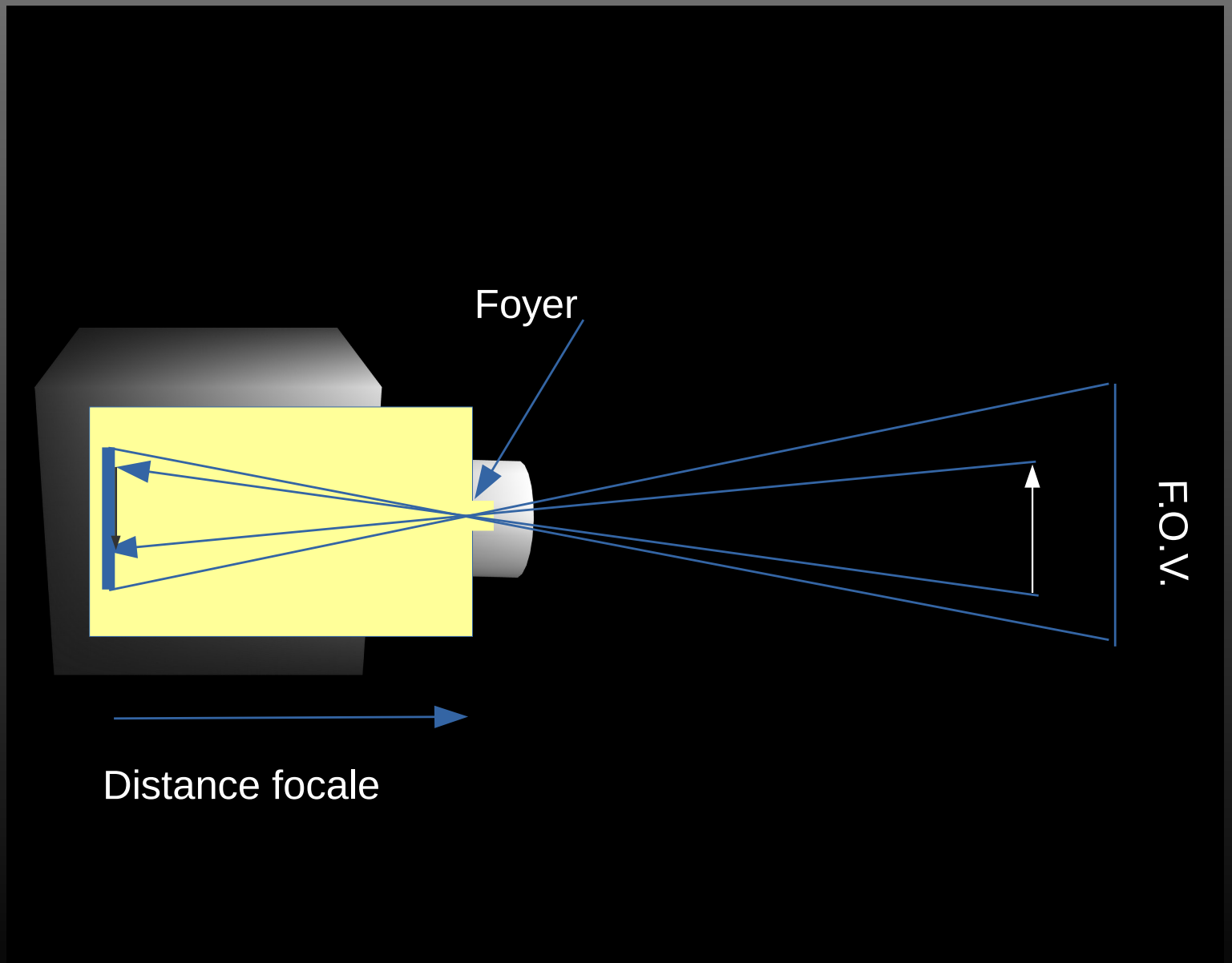
Capture de l'image



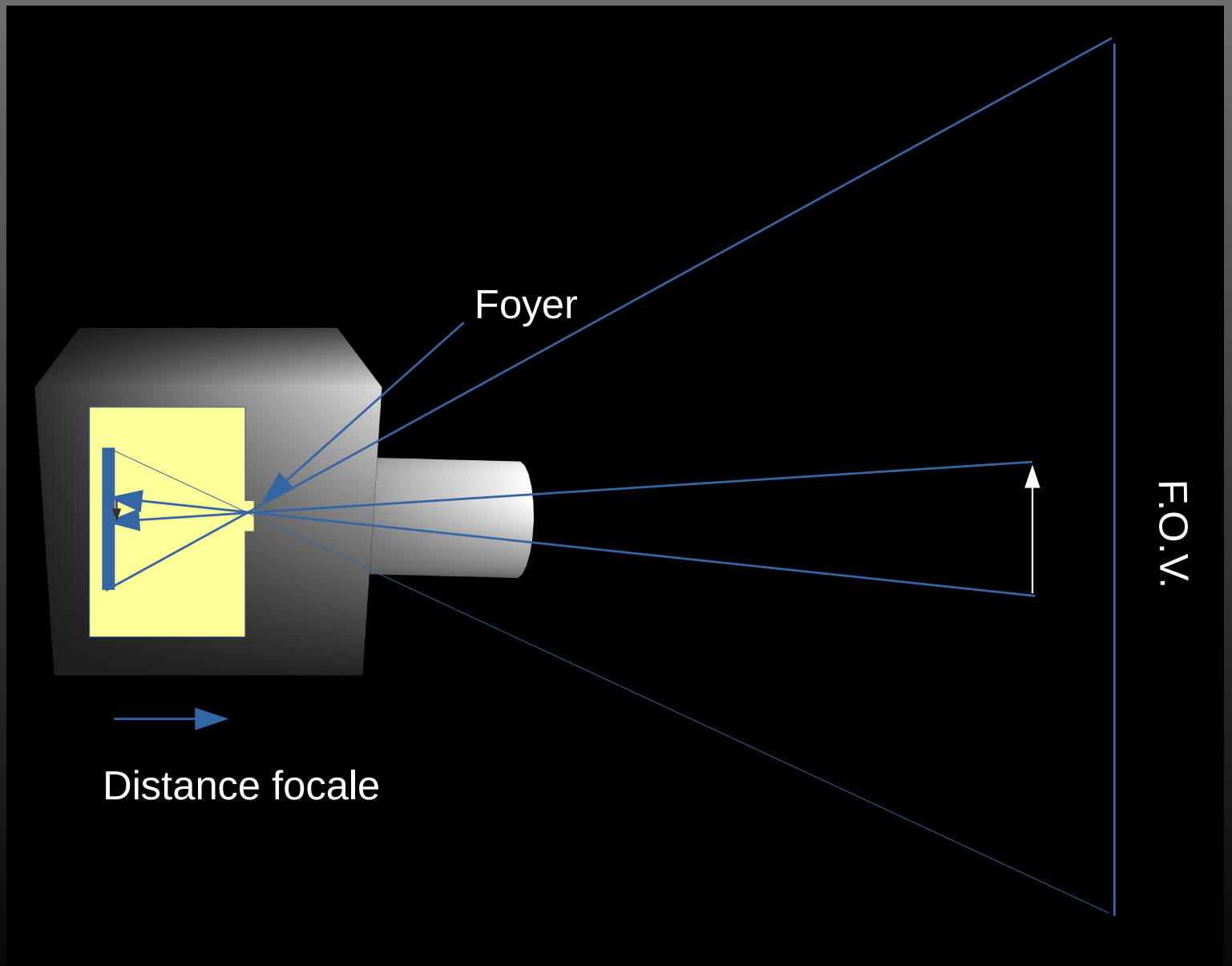
Capture de l'image



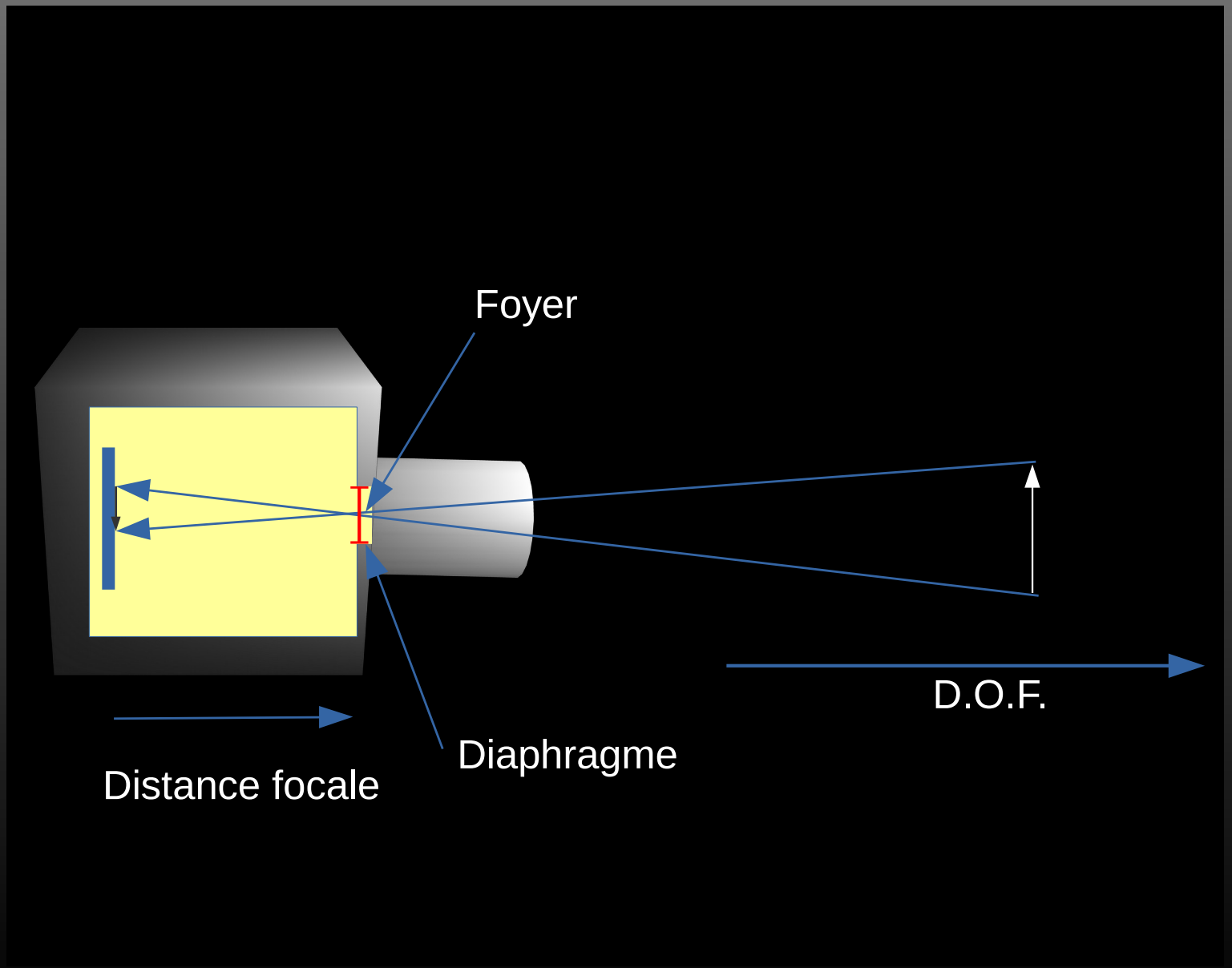
Capture de l'image



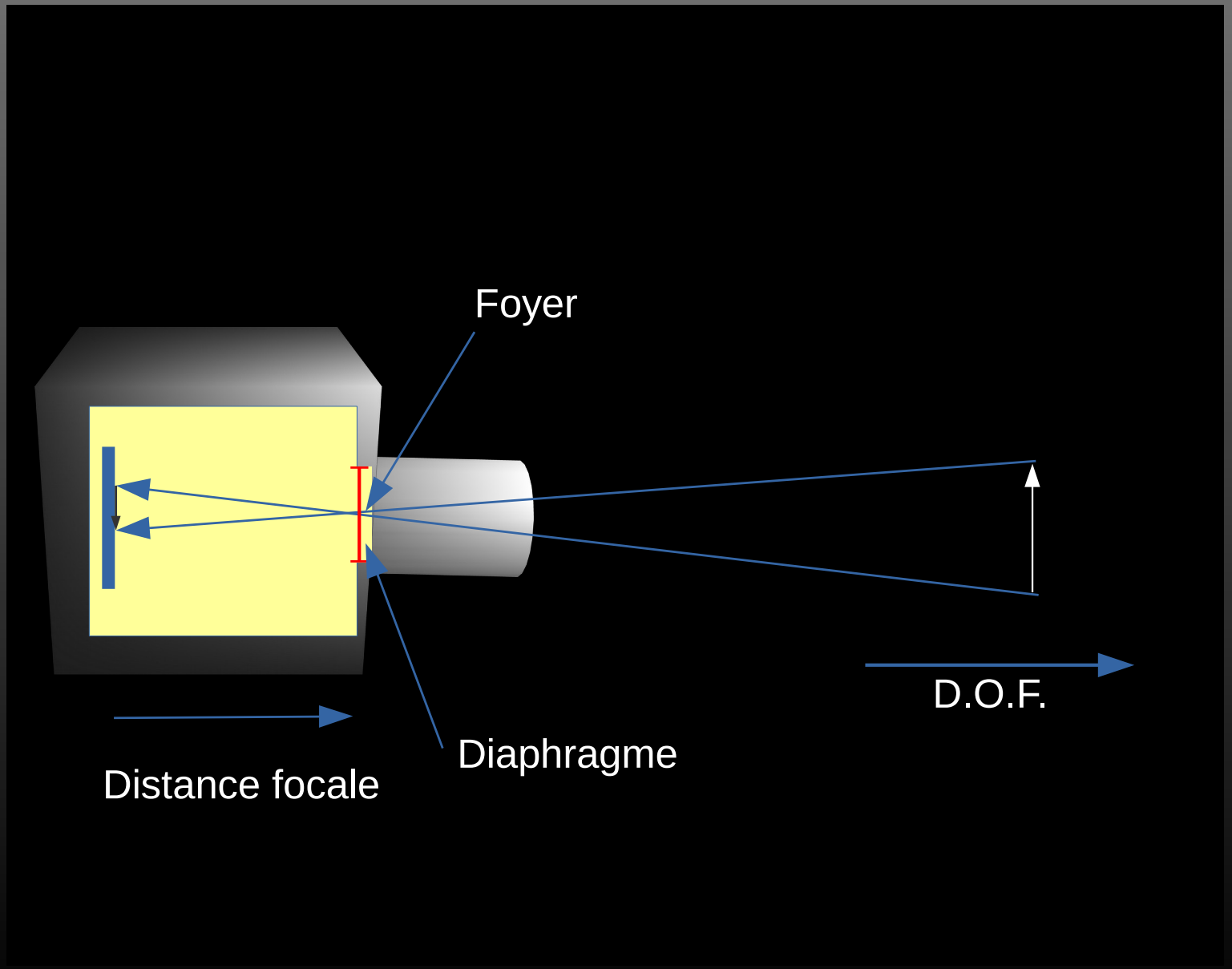
Capture de l'image



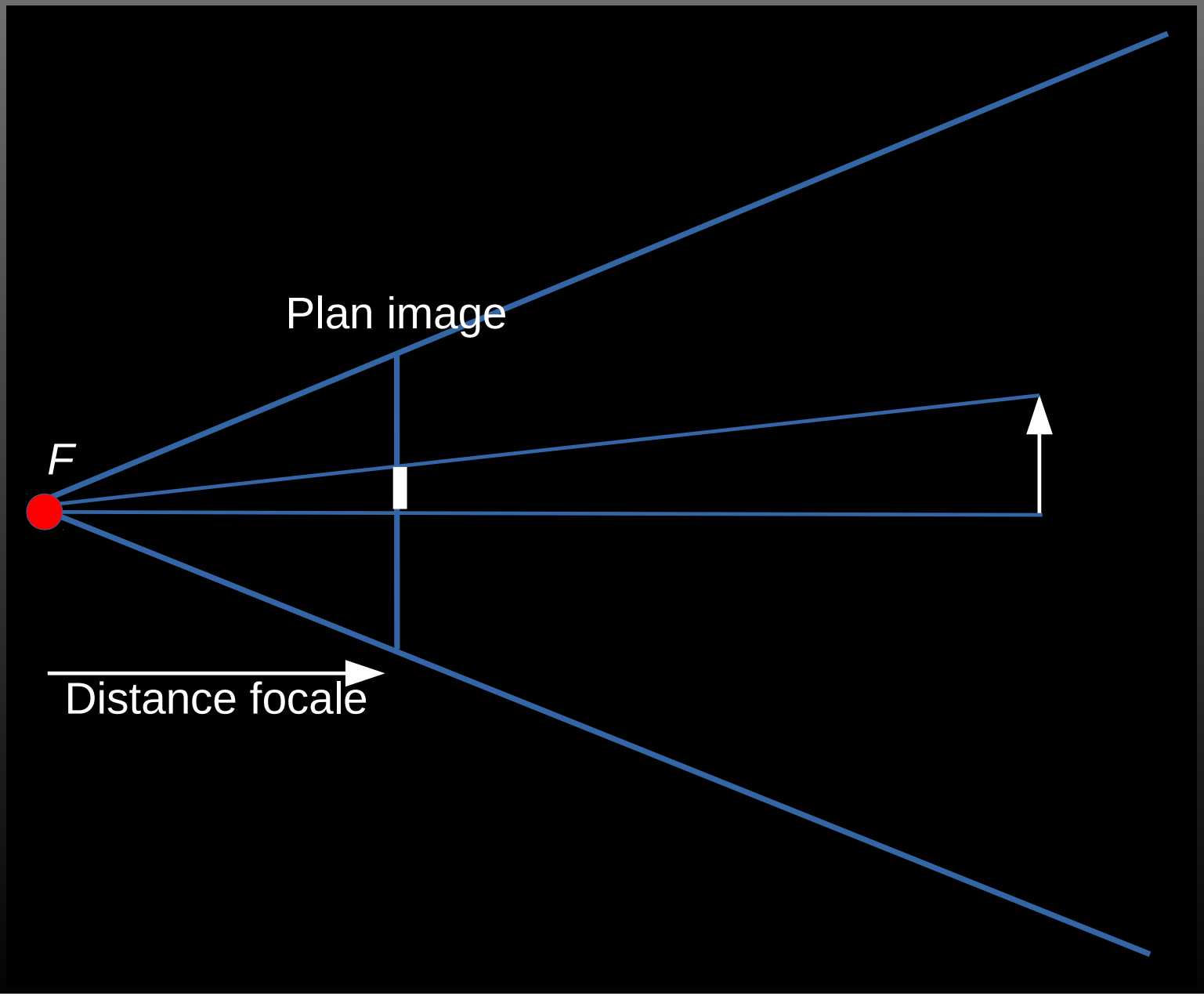
Capture de l'image



Capture de l'image

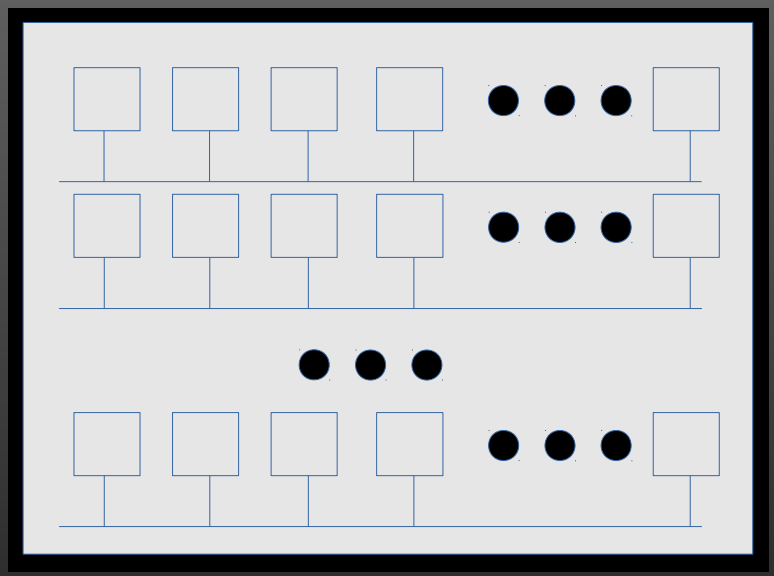


Capture de l'image

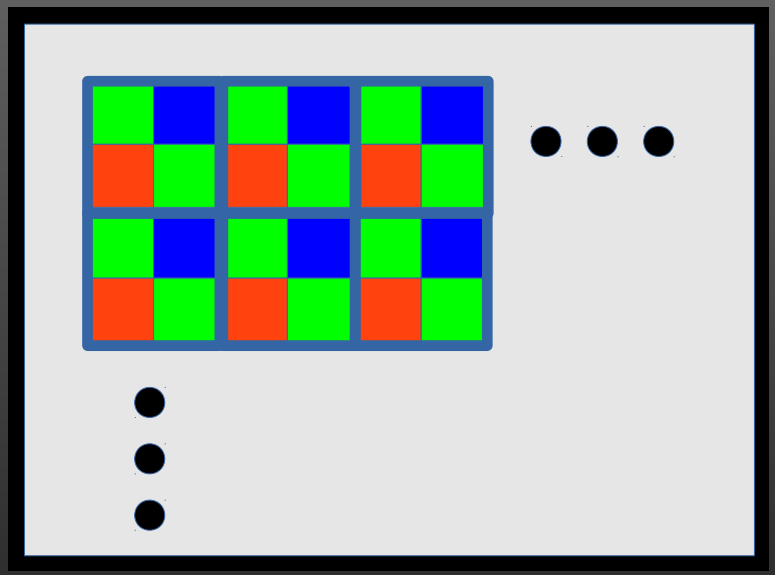


Capture de l'image

Capteurs : CCD, CMOS...



Niveau de gris



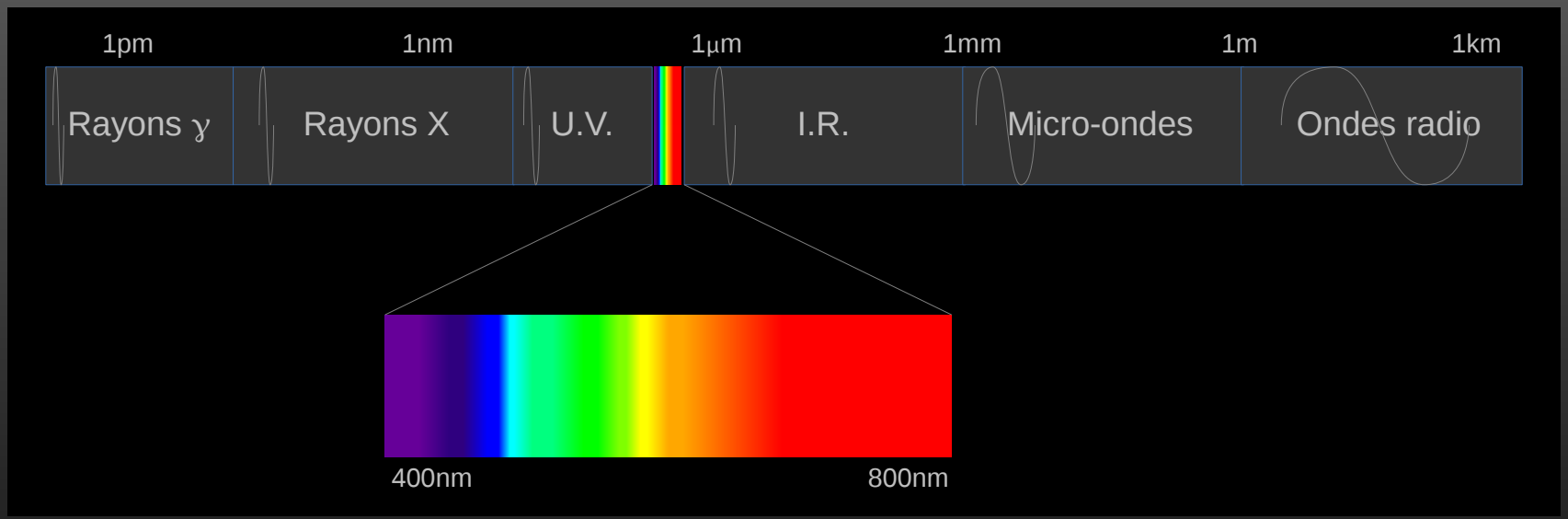
Couleur (*Bayer pattern*)

Pourquoi ces couleurs ?

Pourquoi deux fois plus de vert ?

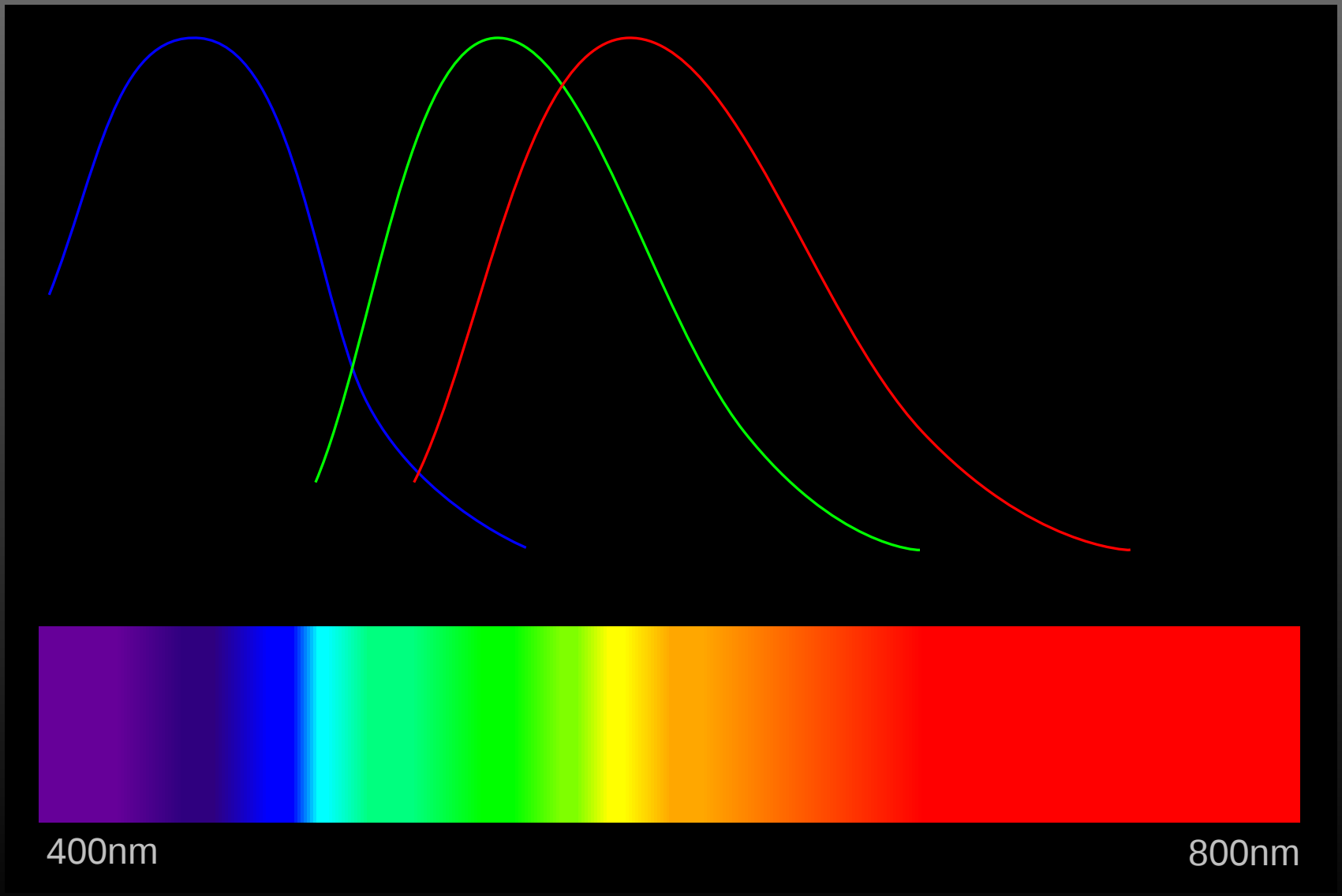
Formation de l'image

Le spectre :



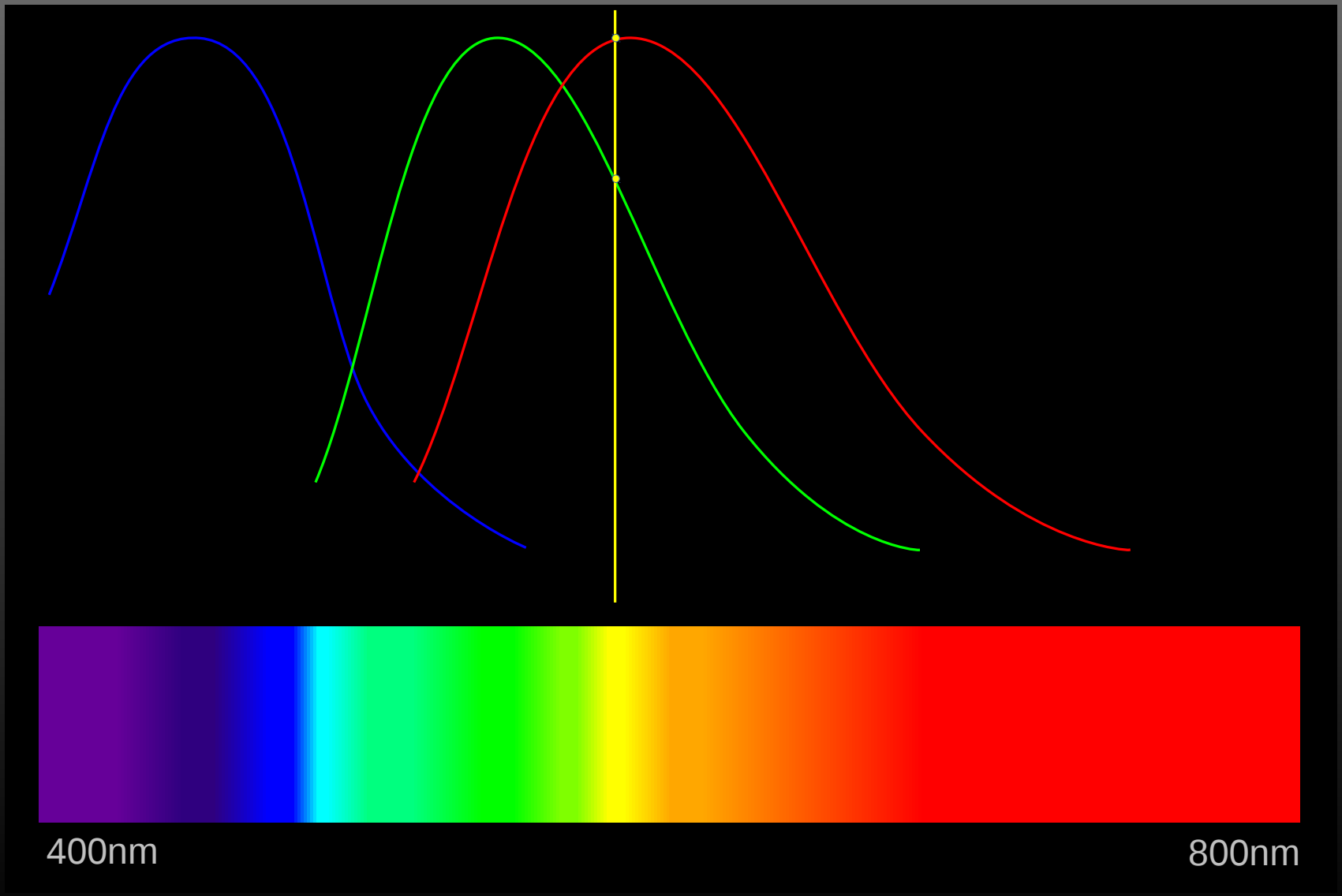
Formation de l'image

La perception humaine :



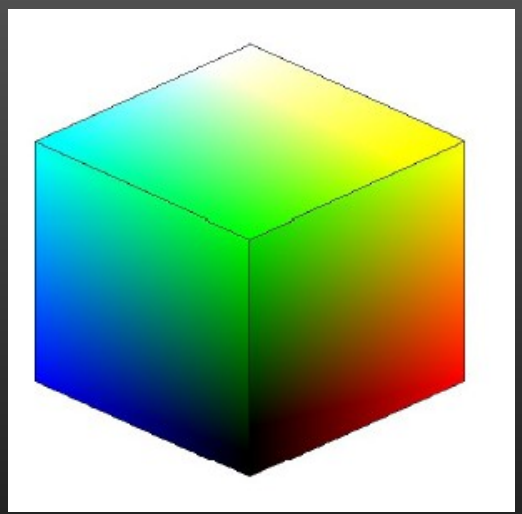
Formation de l'image

La perception humaine :



Formation de l'image

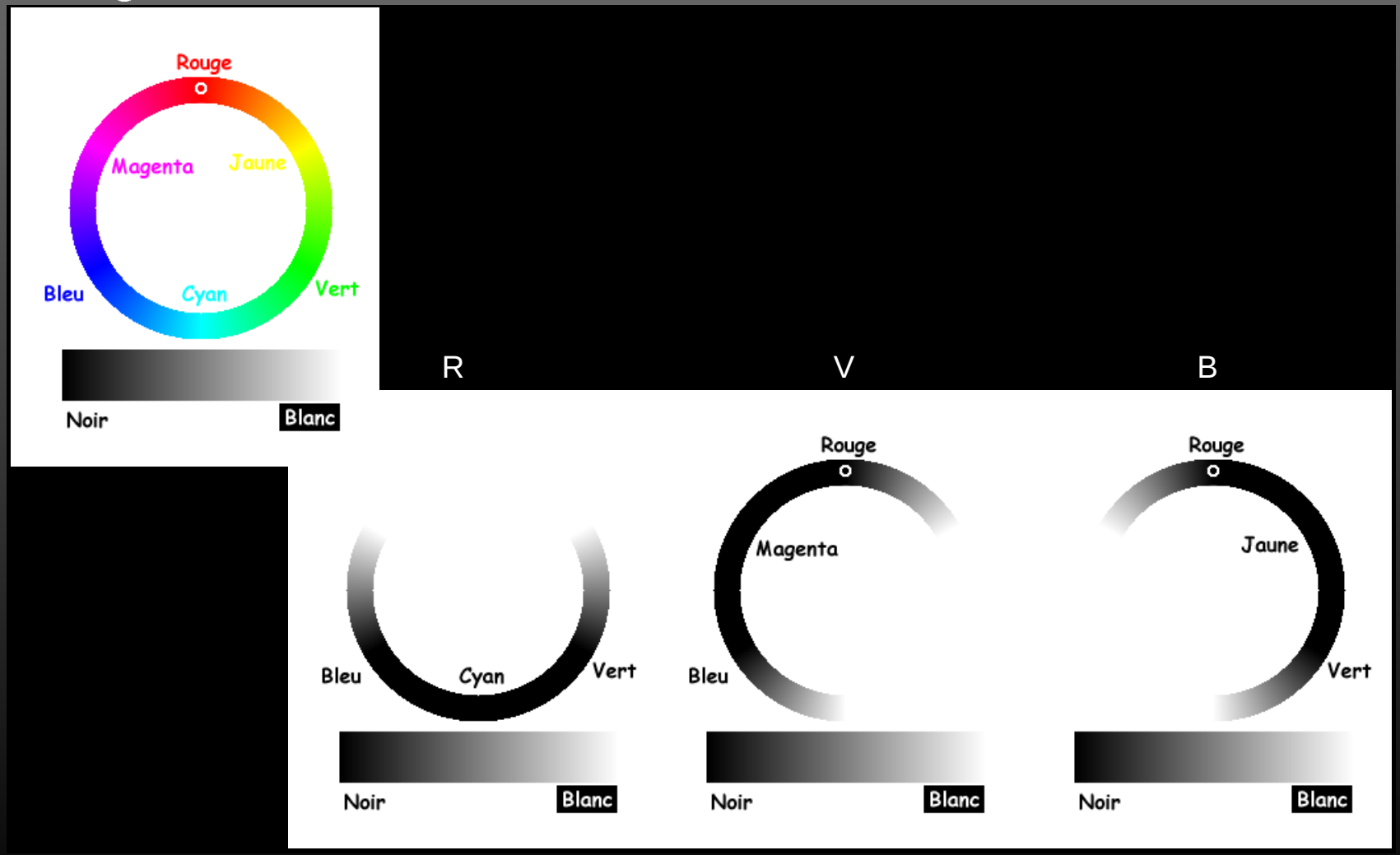
Codage de la couleur



- Modèle RGB
  - On code une couleur par la quantité de rouge, de vert et de bleu que contient cette couleur
    - Une couleur est alors un point du cube
  - Modèle directement lié à notre perception

Formation de l'image

Codage de la couleur



Formation de l'image

Génération d'une image synthétique :

- Simuler les phénomènes optiques qui conduisent à la formation de l'image

Rappels

Mathématiques : géométrie euclidienne et projective

Géométrie Euclidienne

- Produit scalaire : forme bilinéaire, symétrique, définie positive
- Espace pré-hilbertien $(E, |)$ réel
  - E : R-espace vectoriel
  - $|$: produit scalaire
- Espace euclidien
  - Espace pré-hilbertien réel de dimension finie

Géométrie Euclidienne

- Espace affine $\mathcal{F}$ de E (e.v) :
  - $\mathcal{F}$ s.e.v. de E
  - Soit $A \in E, \forall x \in \mathcal{F}; A + x \in \mathcal{F}$
- Cas particuliers :
  - Dim 0 => un point
  - Dim 1 => une droite affine
  - Dim 2 => un plan affine
- Repère cartésien de $\mathcal{F}$: (O, B) avec O un point de $\mathcal{F}$ et B une famille de vecteurs de $\mathcal{F}$ formant une base de $\mathcal{F}$.

Géométrie euclidienne

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une norme N sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$ tel que :
  - $\forall u \in E, N(u) \geq 0$
  - $\forall u \in E, N(u) = 0 \iff u = 0$
  - $\forall (u, \lambda) \in (E \times \mathbb{R}), N(\lambda u) = \mid \lambda \mid N(u)$
  - $\forall (u, v) \in E^2, N(u + v) \leq N(u) + N(v)$
- Définition associée au produit scalaire :
  - $N(u) = \sqrt{u \mid u}$: norme euclidienne

Géométrie euclidienne

- Produit Mixte :
  - $[u, v, w] = det(u, v, w)$
  - $= (u \times v).w$
  - Donne le volume du parallélépipède
- Produit vectoriel :
  - $x; [u, v, w] = x.w(x = u \times v)$
  - $\|u \times v\|$ aire du rectangle
  - $\frac{1}{2}\|u \times v\|$ aire du triangle

Géométrie euclidienne

Vecteurs et angles en euclidien

- Produit scalaire : $u.v = \|u\|\|v\|cos(u, v)$
- Produit vectoriel : $u \times v = \|u\|\|v\|sin(u, v)$
- $u.v = 0 \iff u$ et v ortho.
- $(u.v)^2 + (u \times v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$

Géométrie euclidienne

Équation de droites

- 2D
  - Cartésienne
  - Implicite
  - Paramétrique
- 3D
  - Cartésienne
  - Implicite
  - Paramétrique

Définitions

- 2D
  -
  -
  -
- 3D
  -
  -
  -

Géométrie euclidienne

Équation d'un plan

- 3D
  - Cartésienne
  - Implicite
  - Paramétrique

Géométrie euclidienne

Équation d'un cercle/d'une sphère

- 2D/3D
  - Cartésienne
  - Implicite
  - Paramétrique

Géométrie euclidienne

- Utilité du déterminant :
  - Équation de droite passant par $(x1, y1)$ et $u(a, b)$
  - $\begin{vmatrix} x - x_1 & a \\ y - y_1 & b \end{vmatrix} = 0$
  - Équation de droite passant par (x1, y1) et (x2, y2)
  - $\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 \\ y - y_1 & y - y_2 \end{vmatrix} = 0$
- Idem pour l'équation d'un plan dans un espace 3D

Géométrie euclidienne

- Intersection droite/plan
- Intersection droite/sphere

Géométrie euclidienne

- Intersection droite/plan
- Intersection droite/sphere
  - Calcul de l'intersection dans le repère local ou global ?

Géométrie euclidienne

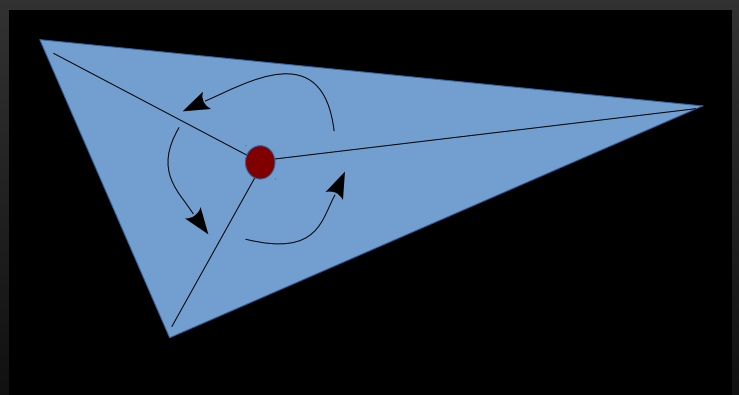
Intersection droite/plan

- Droite : $P + t\vec{v}$
- Plan $ax + by + cz = d$ ou $\vec{N}.\vec{X} = d$
- $\vec{N}.(P + t\vec{v}) = d$
- $t_i = \frac{(d - \vec{N}.P)}{\vec{N}.\vec{v}}$
  - Cas particulier si d parallèle au plan ($\vec{N}.\vec{v} = 0$).
- $I = P + t_i\vec{v}$

Géométrie euclidienne

Intersection droite/plan $\rightarrow$ droite/triangle

- Vérifier que I est dans le triangle ABC
  - Exprimer I en fonction de A, B et C.
    - Les coordonnées barycentriques doivent être toutes positives
  - Déterminer les équations de chaque coté du triangle
    - Déterminer la position de I vis à vis de chaque coté i.e. $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c > 0$
  - Avec l'algorithme de Cyrus-Beck
  - En regardant l'orientation du sens de parcours



Géométrie euclidienne

Intersection droite/sphère

- Idem que pour le plan mais avec l'équation de la sphère. 3 cas possibles :
  - Pas de solution (pas d'intersection)
  - Solution double (la droite touche la surface de la sphère)
  - Deux solutions distinctes (la droite traverse la sphère)

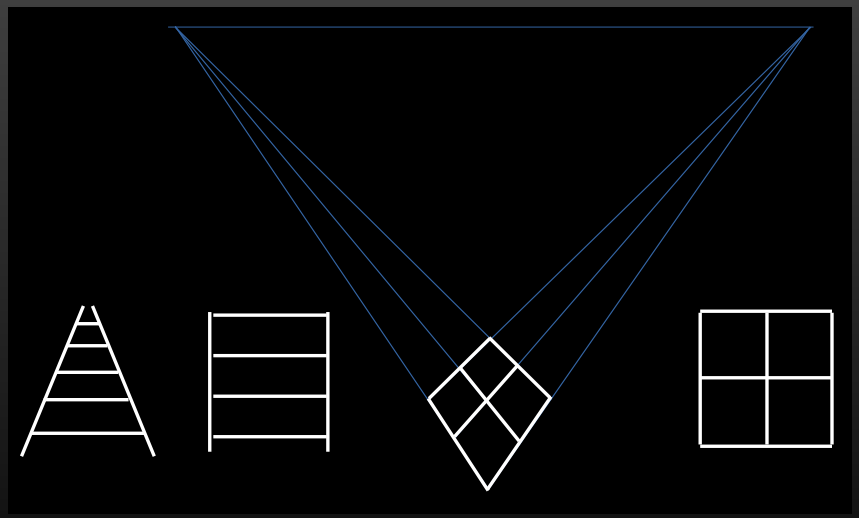
Géométrie euclidienne

- Distance point/droite
  - $d(p, D) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$
  - $d(p, D) = \frac{|\vec{AM}.\vec{n}|}{\|n\|}$
- Distance point/plan
  - $d(p, P) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$
  - $d(p, P) = \frac{|\vec{AM}.\vec{n}|}{\|n\|}$
- Distance droite/droite $D_i(A_i, \vec{v_i})$
  - $d(D_1, D_2) = [\vec{A_1 A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}]/\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|$
- Distance sphere/sphere

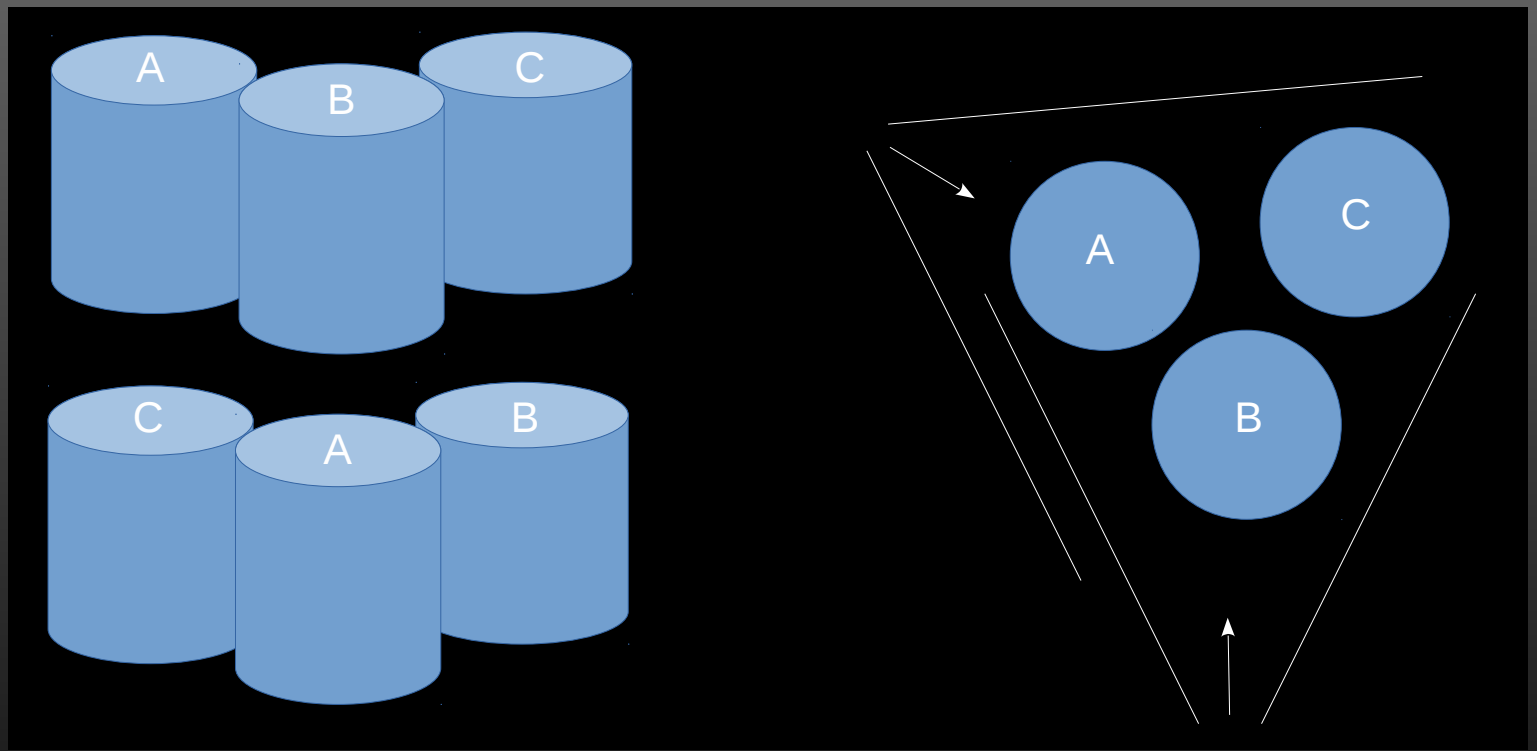
Géométrie projective

Géométrie projective

- Géométrie euclidienne :
  - Étude des formes des “objets”
  - Invariance par rotation, translation, réflexion
- Géométrie projective :
  - Étude des objets tel qu’ils sont vus
  - Perception des angles, des distances, du parallélisme distordu

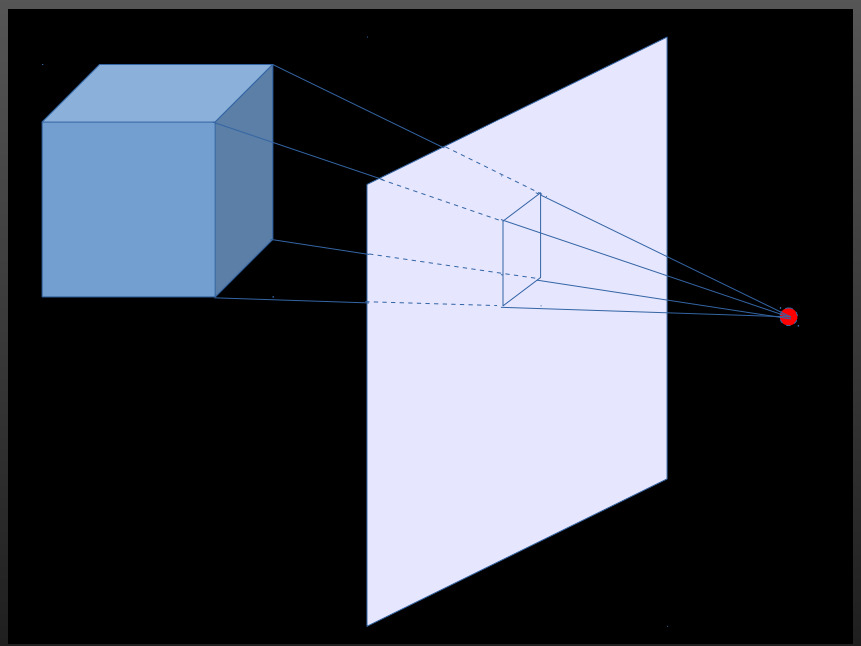


Géométrie projective



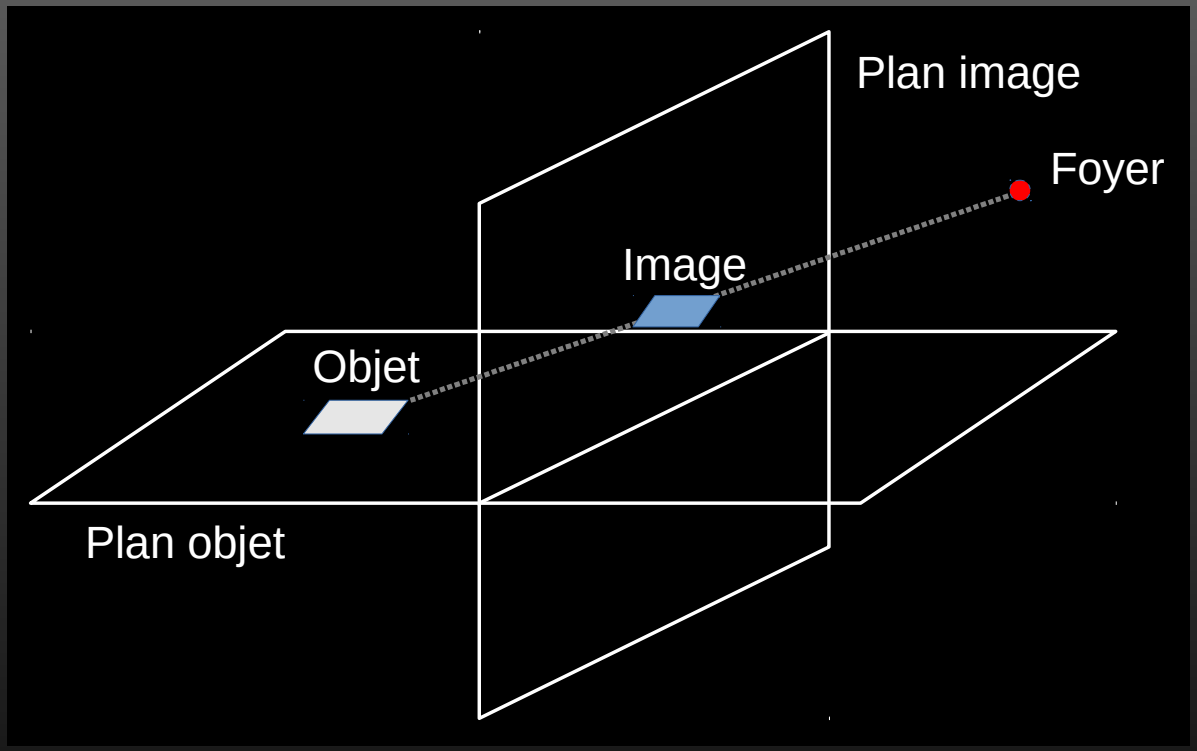
Géométrie projective

- Projection sur le plan image



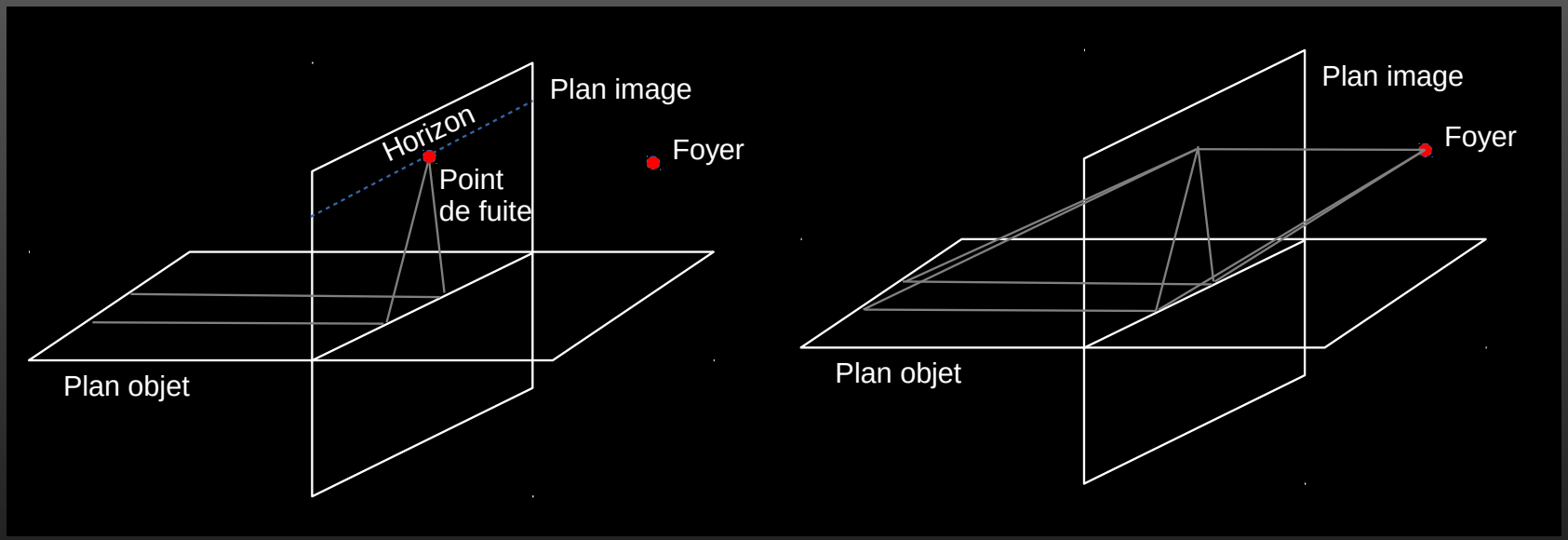
Géométrie projective

- Projection sur le plan image



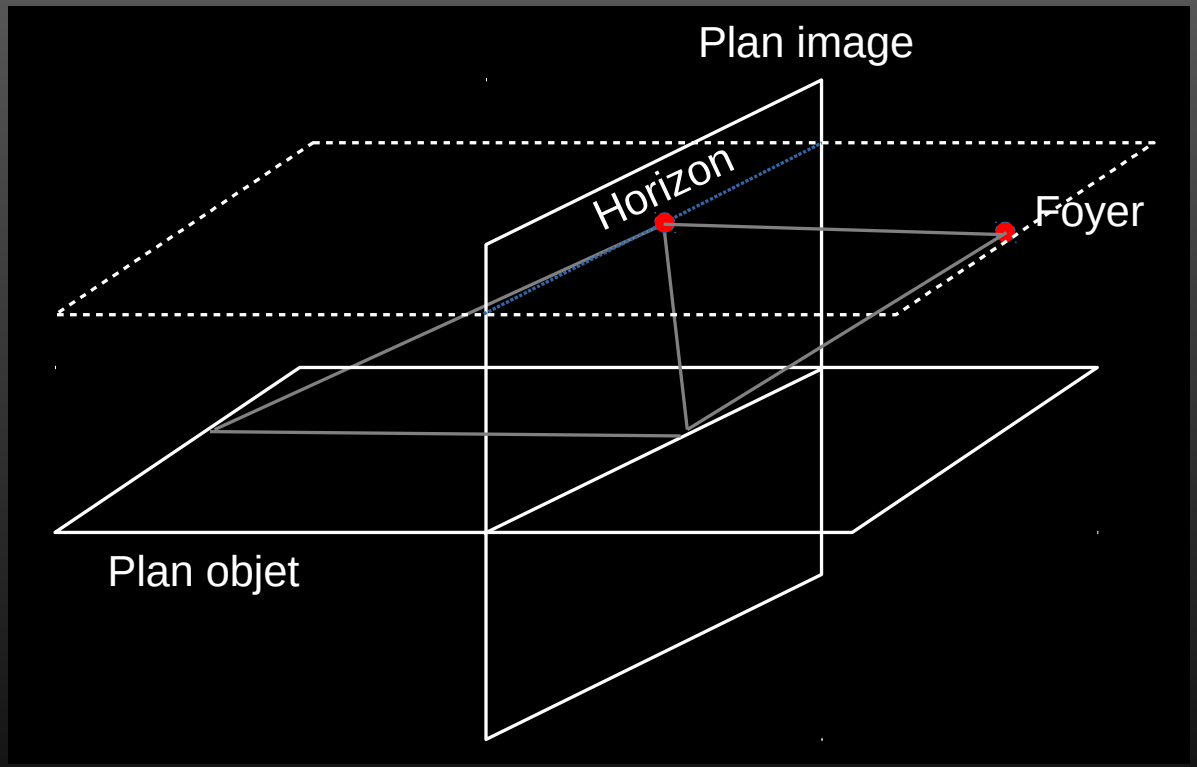
Géométrie projective

- Point de fuite



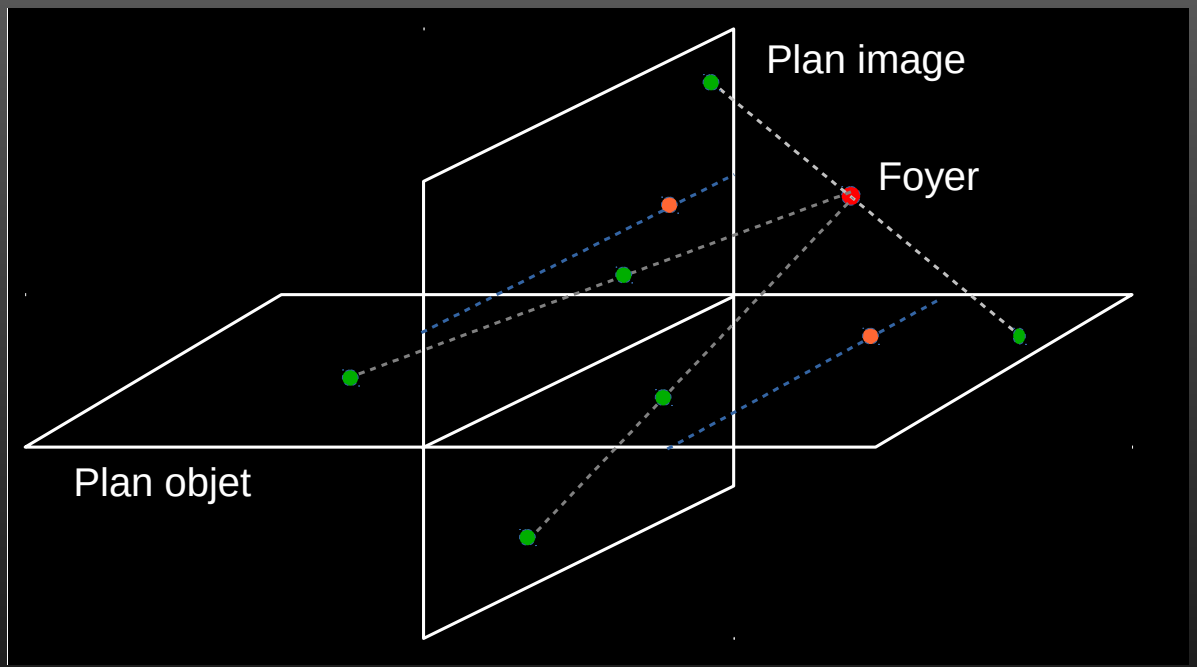
Géométrie projective

- Horizon : Intersection du plan passant par le foyer et parallèle au plan objet



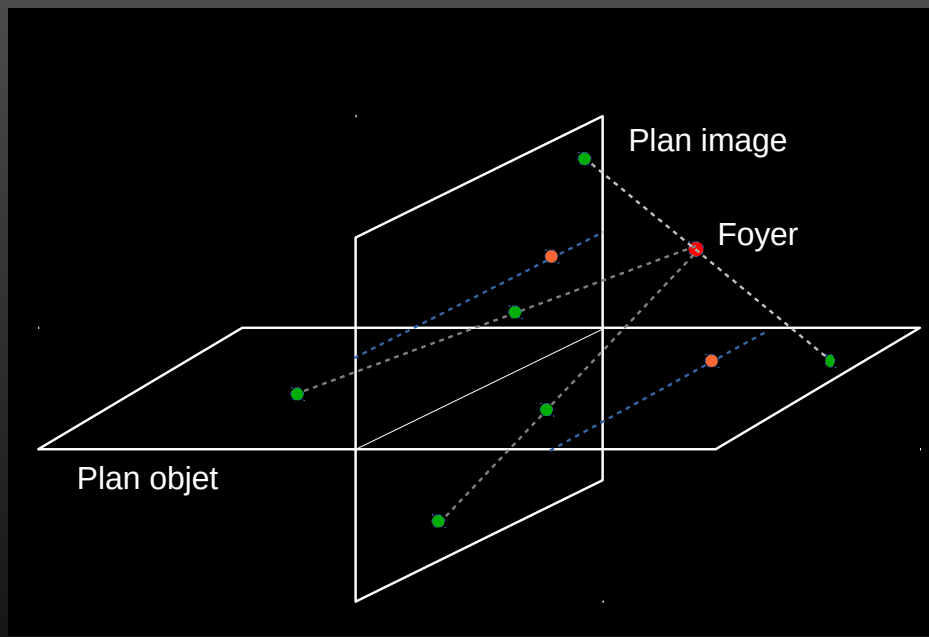
Géométrie projective

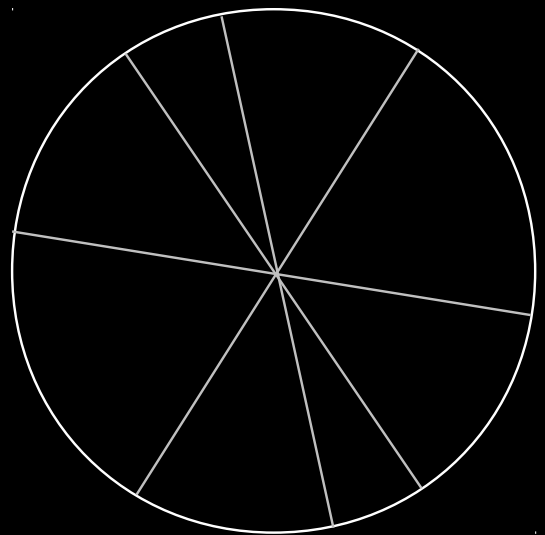
- Points à l'infini



Géométrie projective

- Points à l'infini
  - On ajoute aux plans des points à l'infini
  - Un ensemble de droites parallèles convergent vers ce point à l'infini





Géométrie projective : Coordonnées homogènes

Dans le plan

- RP^2 est l'ensemble des triplets $[p] = [p1, p2, p3]$ avec $(p1, p2, p3)$ dans $\mathbb{R}^3$ privé de $(0, 0, 0)$
- Deux points p et q sont égaux si et seulement si il existe un k dans R^* tel que :
  - $p_1 = kq_1$ et $p_2 = kq_2$ et $p_3 = kq_3$

Géométrie projective : Coordonnées homogènes

$[p] = [p_1, p_2, p_3]$
Deux cas :

- $p_3 = 0$ $[p_1, p_2, p_3] = [p_1, p_2, 0] \in RP^2$
- $p3 \neq 0$ $[p_1, p_2, p_3] = [p_1/p_3, p_2/p_3, 1] \in RP^2$

Géométrie projective : Coordonnées homogènes

Homogènes : peut représenter les points euclidiens et les points idéaux
$[a, b, 0]$: (a, b) donne la direction des droites associées

Géométrie projective : Coordonnées homogènes

Idem pour une droite projective et pour l'espace 3D

Transformations usuelles

Représentation des transformations usuelles dans l'espace projectif

- Translation
- Echelle
- Rotation
- Projection

Combinaison des transformations

Transformations usuelles

Translation

Transformations usuelles

Translation

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transformations usuelles

Mise à l'échelle

Transformations usuelles

Mise à l'échelle

- $\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transformations usuelles

Rotation

Transformations usuelles

Rotation

- Suivant un axe : $\begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 & 0 \\ \sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...

Transformations usuelles

Rotation

- Suivant un axe : $\begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 & 0 \\ \sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...
- Suivant un axe quelconque :

$$\begin{pmatrix} x^2(1-\cos)+\cos & xy(1-\cos)-z\sin & xz(1-\cos)+y\sin & 0 \\ yx(1-\cos)+z\sin & y^2(1-\cos)+\cos & yz(1-\cos)-x\sin & 0 \\ xz(1-\cos)-y\sin & yz(1-\cos)+x\sin & z^2(1-\cos)+\cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformations usuelles

Modélisation des rotations : Attention ; L'ordre des rotations compte.

- Spécifier un ordre suivant les 3 axes O_x, O_y et O_z
- Spécifier l'axe de rotation
- Utilisation des quaternions
  - $Q = a + bi + cj + dk$
  - a, b, c, d réels $\rightarrow$ a partie réelle et (b, c, d) partie imaginaire
  - $I^2 = j^2 = k^2 = -1$
  - $i.j = k; j.k = i; k.i = j$
  - $j.i = -k; k.j = -i; i.k = -j$
  - Les quaternions unités (norme (Q) = 1) permettent une représentation plus compacte de n'importe qu'elle rotation

Transformations usuelles

Projection perspective

Transformations usuelles

Combinaison des transformations

Rappels