LE TRAITEMENT D’IMAGES

- LA MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE -

Jonathan Fabrizio

http://jo.fabrizio.free.fr

La Morphologie Mathématique

La Morphologie Mathématique

- Origine :
  - Introduite au milieu des années 60
  - Georges Matheron et Jean Serra

La Morphologie Mathématique

- Support :
  - Jusqu'à présent on travaillait dans un espace vectoriel et on utilisait le produit de convolution.
  - En morphologie mathématique, on travaille sur des treillis complets :
    - ensemble muni d'une relation d'ordre

La Morphologie Mathématique

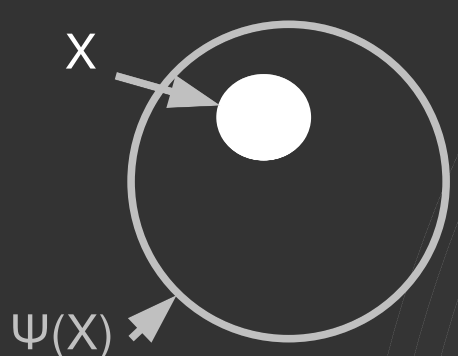
- Rappels :
  - Treillis complet : pour chaque famille d'éléments de l'ensemble il existe
    - un supremum (borne sup)
    - et un infimum (borne inf)

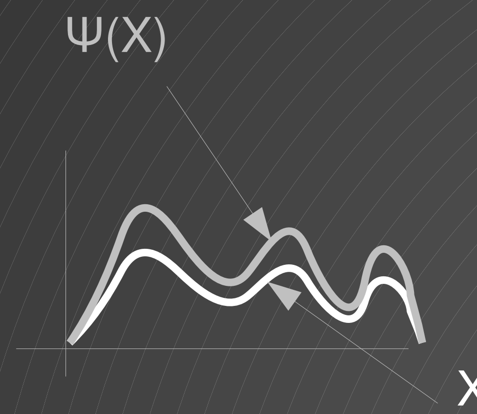
La Morphologie Mathématique

- Rappels :
  - Inf : plus grand minorant : $\wedge$
  - Sup : plus petit majorant : $\vee$
  - $\wedge$ $\vee$ sont symétriques...
  - dualité : deux opérateurs Ψ, Ψ^* sont duaux si pour tout X
    - $\Psi(X^c) = [\Psi^*(X)]^c$ (^{c} dénote le complément)

La Morphologie Mathématique

- Rappels :
  - Extensivité : X inclus ou égal à Ψ(X)
  - Anti-extensivité : Ψ(X) inclus ou égal à X
  - Idempotence : Ψ(Ψ(X)) = Ψ(X)



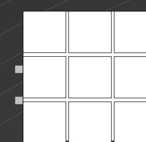


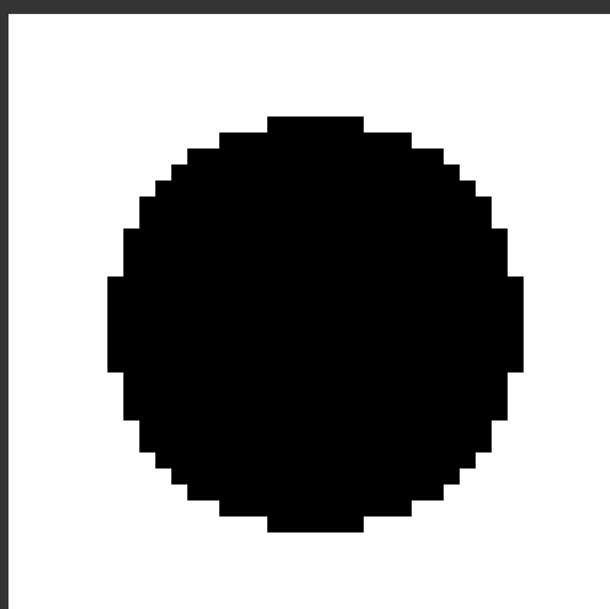
Hit or Miss Transform

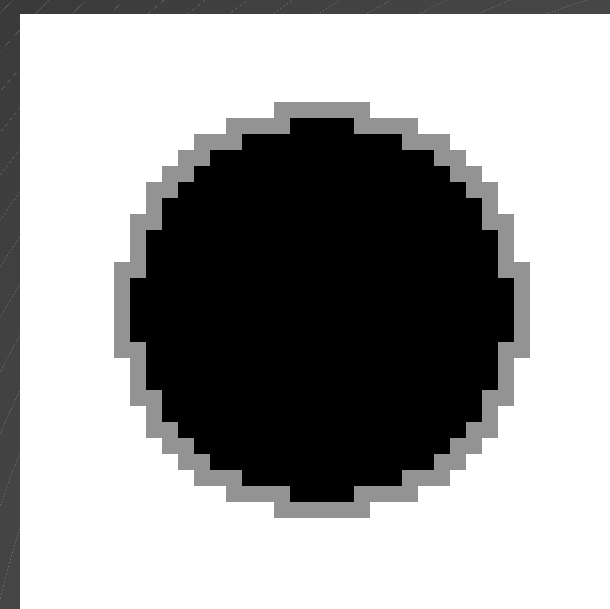
- Hit or Miss Transform HMT :
  - On considère les ensembles $X \subseteq E$
  - Soit deux fonctions *x->A(x)* et *x->B(x)*
  - Résultat : tout $x \in E$; $A(x) \subseteq X^c$ et $B(x) \subseteq X$

➔ A et B sont les éléments structurants

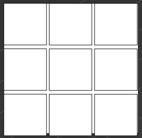
Erosion

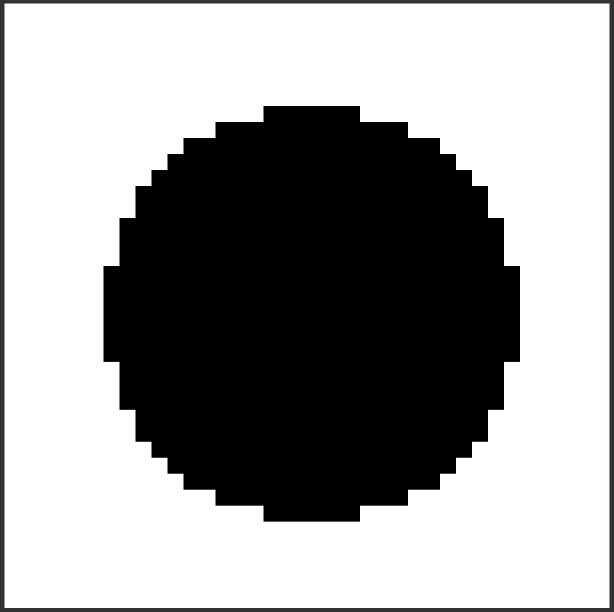
- Erosion
  - On prend A l'ensemble vide et B  :
    - $\varepsilon_B(x) = \{ \text{tout } x \in E \,;\, B(x) \subseteq X \}$

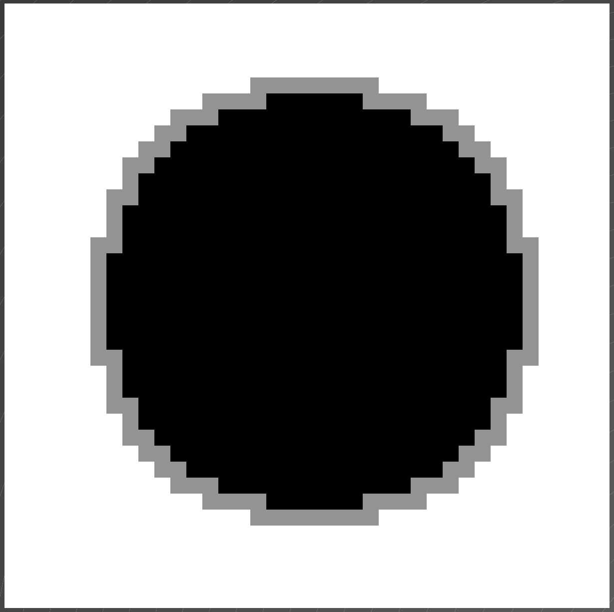




Dilatation

- Dilatation
  - On prends A l'ensemble vide et B  :
    - $\delta_B(X) = \cup \{ B(x) ; x \in X\}$
  - Dual de l'érosion





Érosion/Dilatation

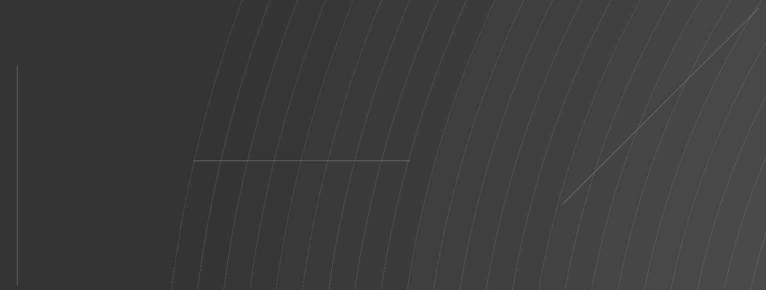
- L'érosion
  - Supprime les éléments plus petits que l'élément structurant
  - Réduit la taille des particules et des convexités

- La dilatation
  - Supprime les trous plus petits que l'élément structurant
  - Réduit la taille des trous et des concavités

Élément structurant

- Choix de l'élément structurant
  - Taille, forme...
  - ex. classification :

  - Élément structurant :



Élément structurant

- Une érosion de taille n = n érosions de taille 1
- Combiner des éléments structurants :

- La forme de l'élément structurant devient visible...

Distance

- Définition simple d'une distance

Images B/W
Images en niveaux de gris

- Pour l'instant : travail en ensembliste sur une image B/W
- Treillis avec inf et sup : on peut avoir une fonction

Empilement d'ensembles :

$$f \oplus B(x) = \sup \{ f(x-y),\ y \in B \}$$
$$f \ominus B(x) = \inf \{ f(x-y),\ y \in B \}$$

Images B/W
Images en niveaux de gris

- Pour l'instant : travail en ensembliste sur une image B/W
- Treillis avec inf et sup : on peut avoir une fonction

Empilement d'ensembles :

$$f \oplus B(x) = \sup \{ f(x-y), y \in B \}$$
$$f \ominus B(x) = \inf \{ f(x-y), y \in B \}$$

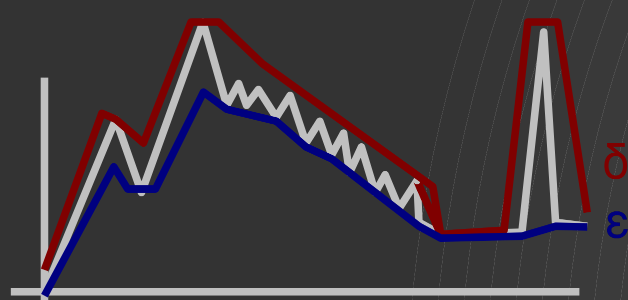
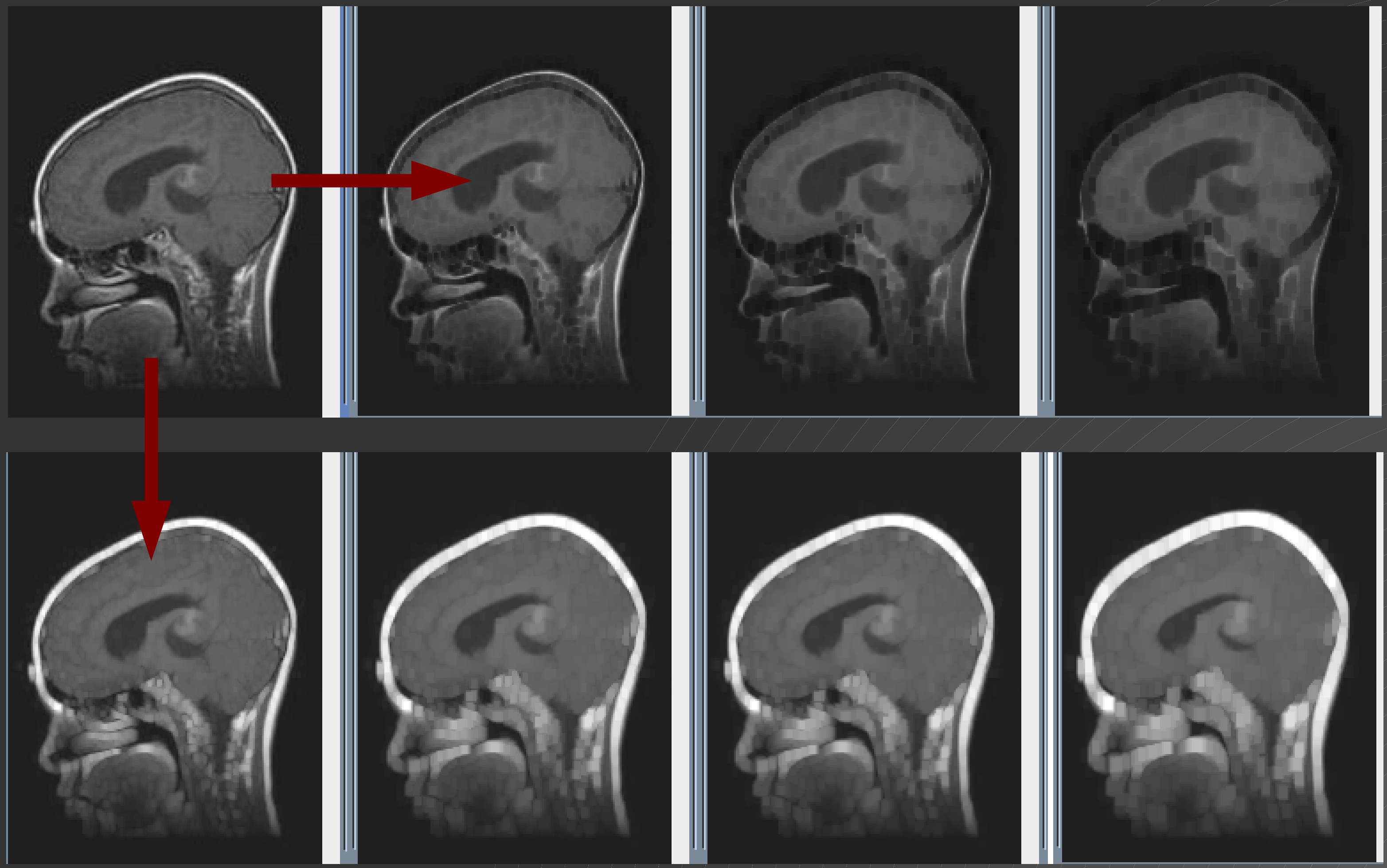


Image en niveaux de gris

- Résultats

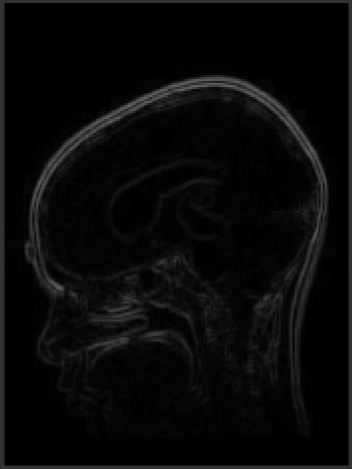


Résidu

- Notion de résidu :
  - On applique deux opérateurs à une image originale et on fait la différence entre les deux résultats

Résidu

- Retour sur le gradient
  - Gradient morphologique



- gradient par érosion : $g^-(f) = f - ero(f)$
- gradient par dilatation : $g^+(f) = dil(f) - f$
- gradient symétrique : $g(f) = dil(f) - ero(f)$
- Laplacien ; $L(f) = g^+(f) - g^-(f)$

  - En binaire : permet de calculer simplement les contours (intérieurs ou extérieurs) fermés des régions

Ouverture/Fermeture

- Ouverture (algébrique)
  - Croissante
  - Anti-extensive
  - Idempotent
- Fermeture (algébrique)
  - Croissante
  - Extensive
  - Idempotent
  - Dual de l'ouverture

➔ Un filtre morphologique croissant et idempotent : toutes fonctions comprises entre une fonction et sa transformée donne la même transformée

Ouverture/Fermeture

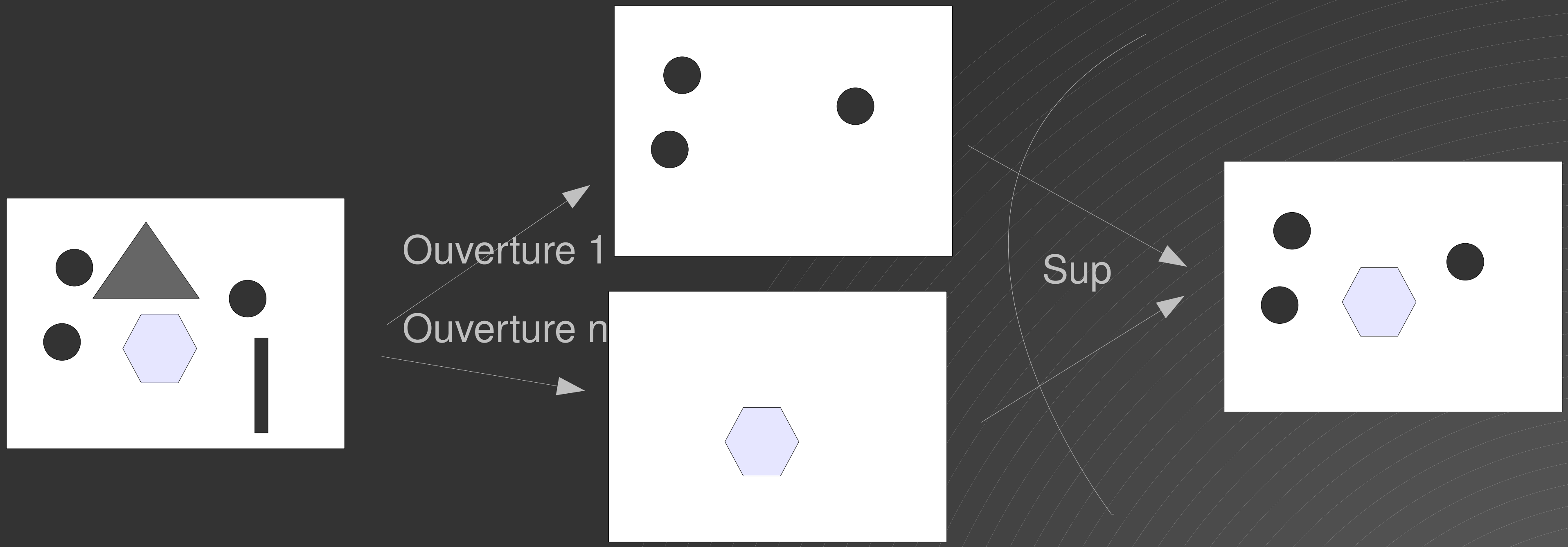
- Ouverture par adjonction :
  - Érosion suivie d'une dilatation
- Fermeture par adjonction
  - Dual de l'ouverture
  - Dilatation suivie d'une érosion

➔ Lissage non linéaire. L'ouverture supprime les pics plus fins que l'élément structurant (reste toujours en dessous de la fonction)

- Autres ouvertures
  - Ouvertures par critère

Ouverture/Fermeture

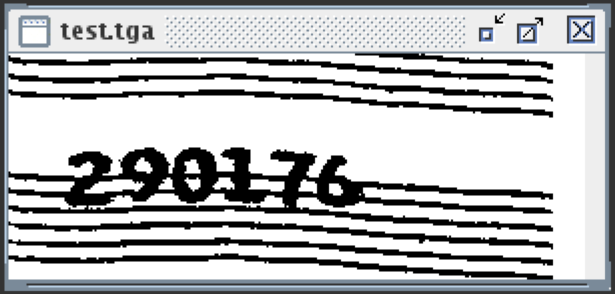
- Le sup d'ouvertures est une ouverture



Choix de l'élément structurant :
Pb de connexité...

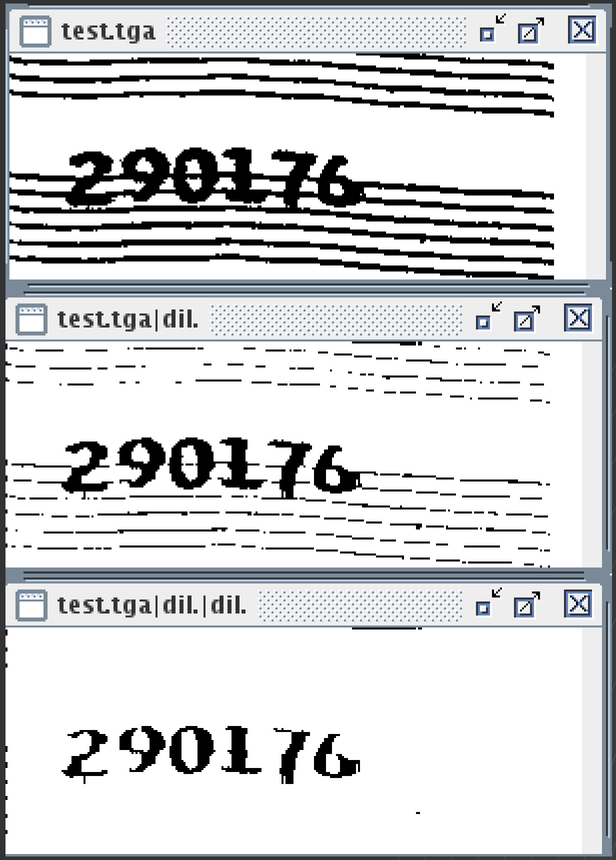
Ouverture/Fermeture

- Exemple :



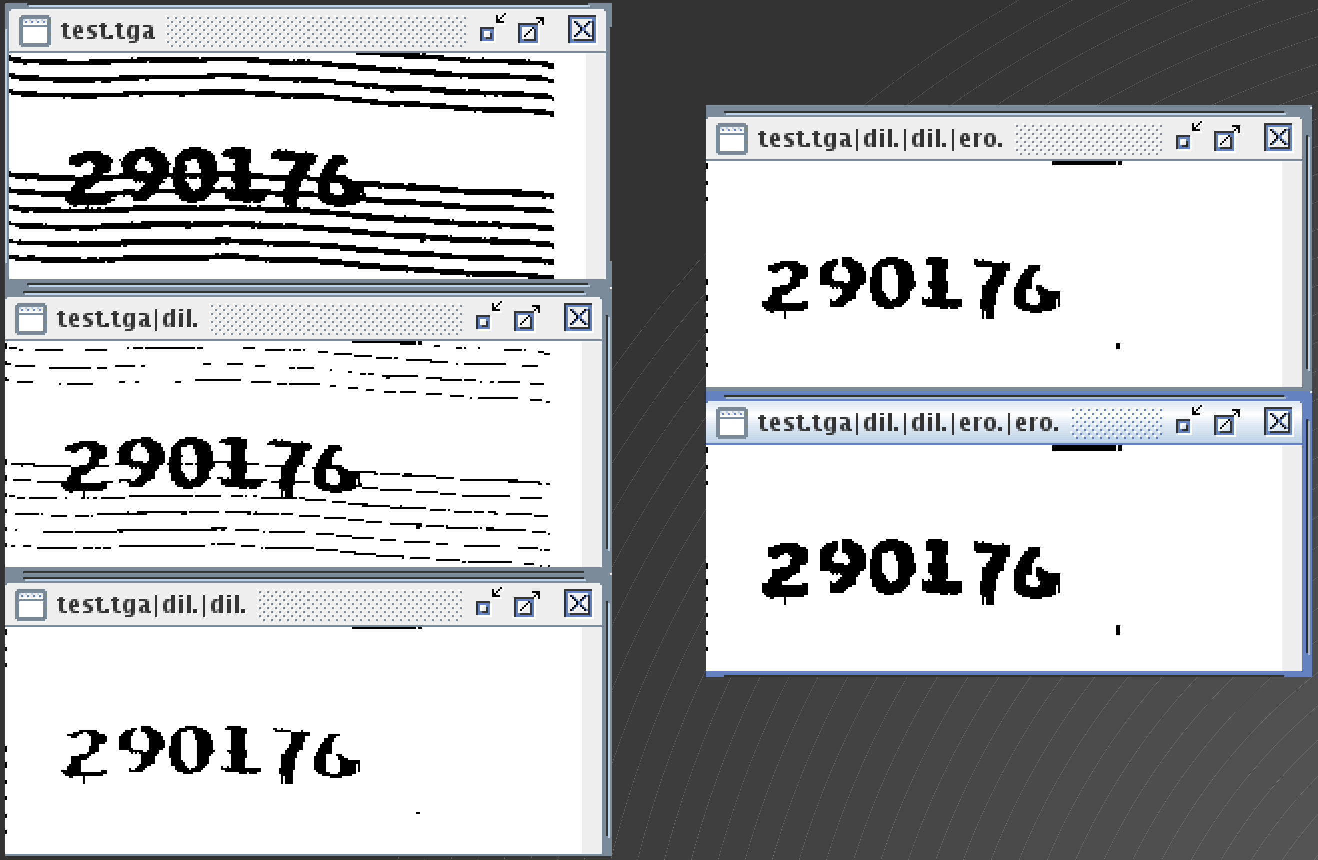
Ouverture/Fermeture

- Exemple :



Ouverture/Fermeture

- Exemple :



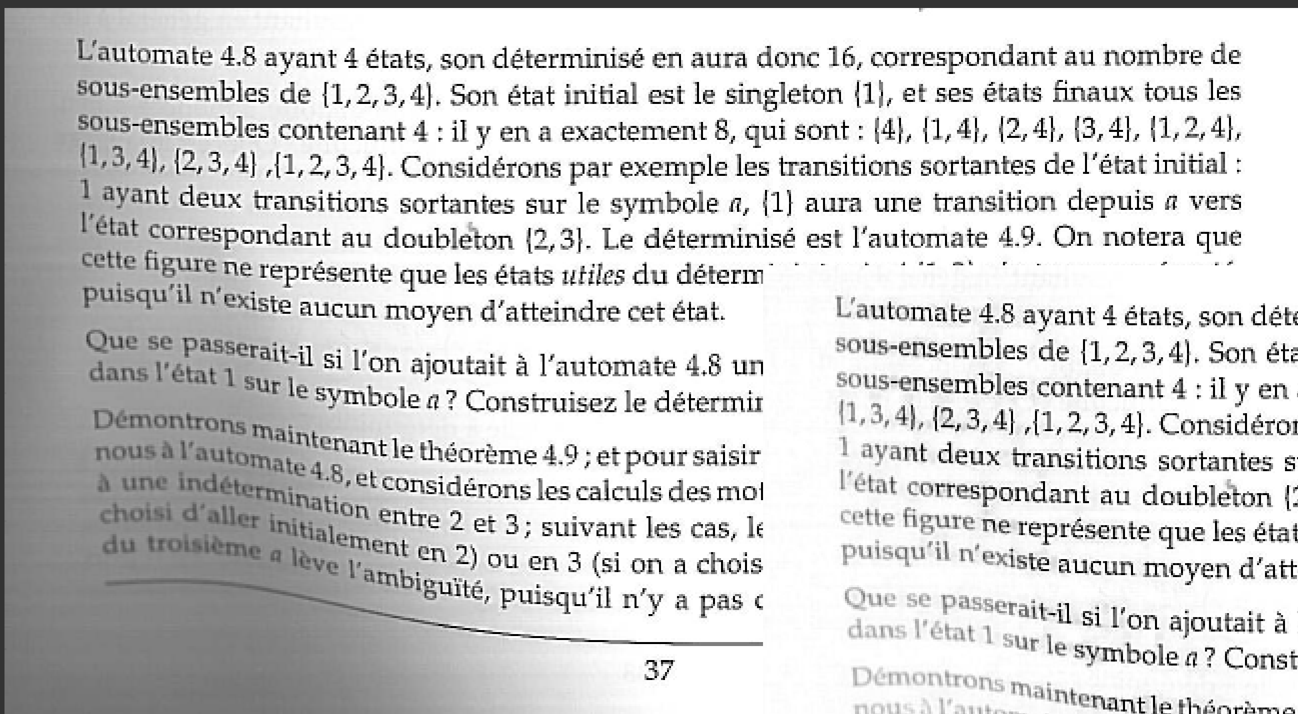
Utilisation de l'ouverture : Top Hat

- Opérateur Top Hat (Chapeau haut de forme)
  - Top-hat(I) = I – ouverture(I)
  - Dual : Top-hat(I) = fermeture(I) - I

  - Usage :
    - Sort les éléments contrastés (les pics plus petits que l'élément structurant)
    - Avec un élément structurant suffisamment grand : corrige l'illumination

Utilisation de l'ouverture : Top Hat

- Résultat

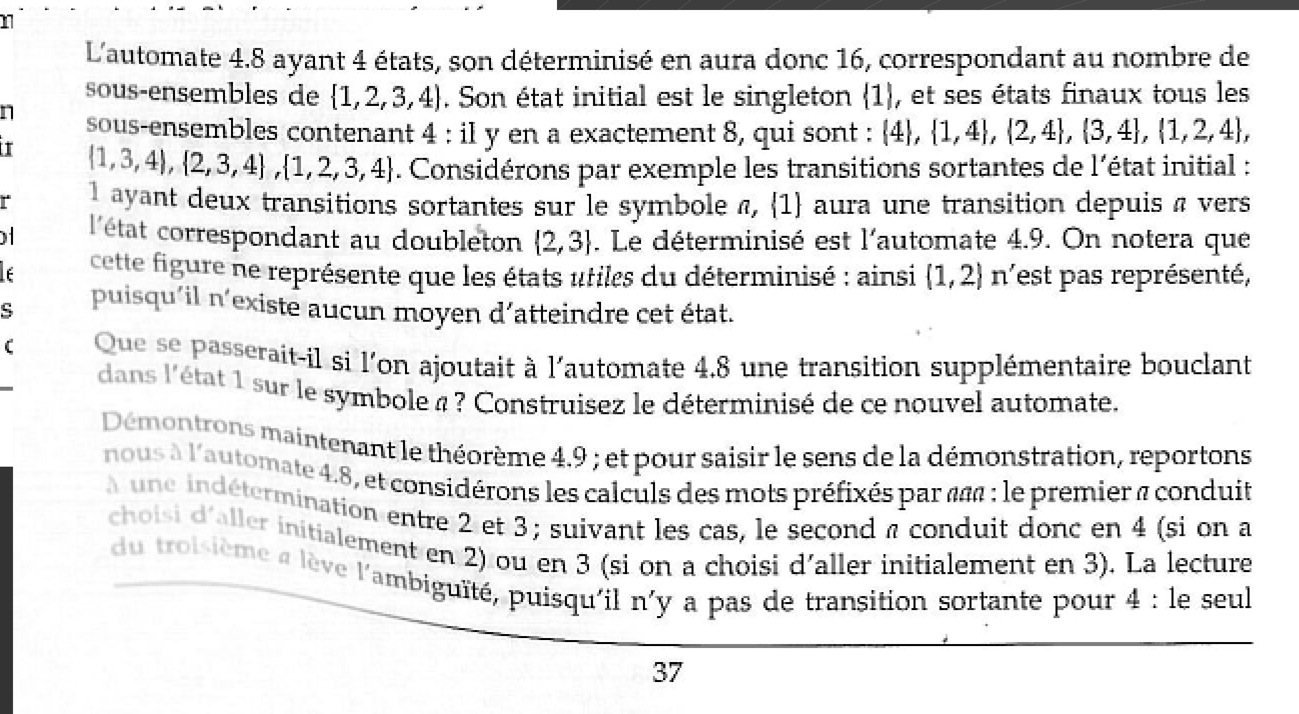


L'automate 4.8 ayant 4 états, son déterminisé en aura donc 16, correspondant au nombre de sous-ensembles de {1, 2, 3, 4}. Son état initial est le singleton {1}, et ses états finaux tous les sous-ensembles contenant 4 : il y en a exactement 8, qui sont : {4}, {1, 4}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4} ,{1, 2, 3, 4}. Considérons par exemple les transitions sortantes de l'état initial : 1 ayant deux transitions sortantes sur le symbole *a*, {1} aura une transition depuis *a* vers l'état correspondant au doubleton {2, 3}. Le déterminisé est l'automate 4.9. On notera que cette figure ne représente que les états *utiles* du déterm
puisqu'il n'existe aucun moyen d'atteindre cet état.

Que se passerait-il si l'on ajoutait à l'automate 4.8 un
dans l'état 1 sur le symbole *a* ? Construisez le détermi

Démontrons maintenant le théorème 4.9 ; et pour saisir
nous à l'automate 4.8, et considérons les calculs des mot
à une indétermination entre 2 et 3 ; suivant les cas, le
choisi d'aller initialement en 2) ou en 3 (si on a chois
du troisième *a* lève l'ambiguïté, puisqu'il n'y a pas d

37



L'automate 4.8 ayant 4 états, son déterminisé en aura donc 16, correspondant au nombre de sous-ensembles de {1, 2, 3, 4}. Son état initial est le singleton {1}, et ses états finaux tous les sous-ensembles contenant 4 : il y en a exactement 8, qui sont : {4}, {1, 4}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4} ,{1, 2, 3, 4}. Considérons par exemple les transitions sortantes de l'état initial : 1 ayant deux transitions sortantes sur le symbole *a*, {1} aura une transition depuis *a* vers l'état correspondant au doubleton {2, 3}. Le déterminisé est l'automate 4.9. On notera que cette figure ne représente que les états *utiles* du déterminisé : ainsi {1, 2} n'est pas représenté, puisqu'il n'existe aucun moyen d'atteindre cet état.

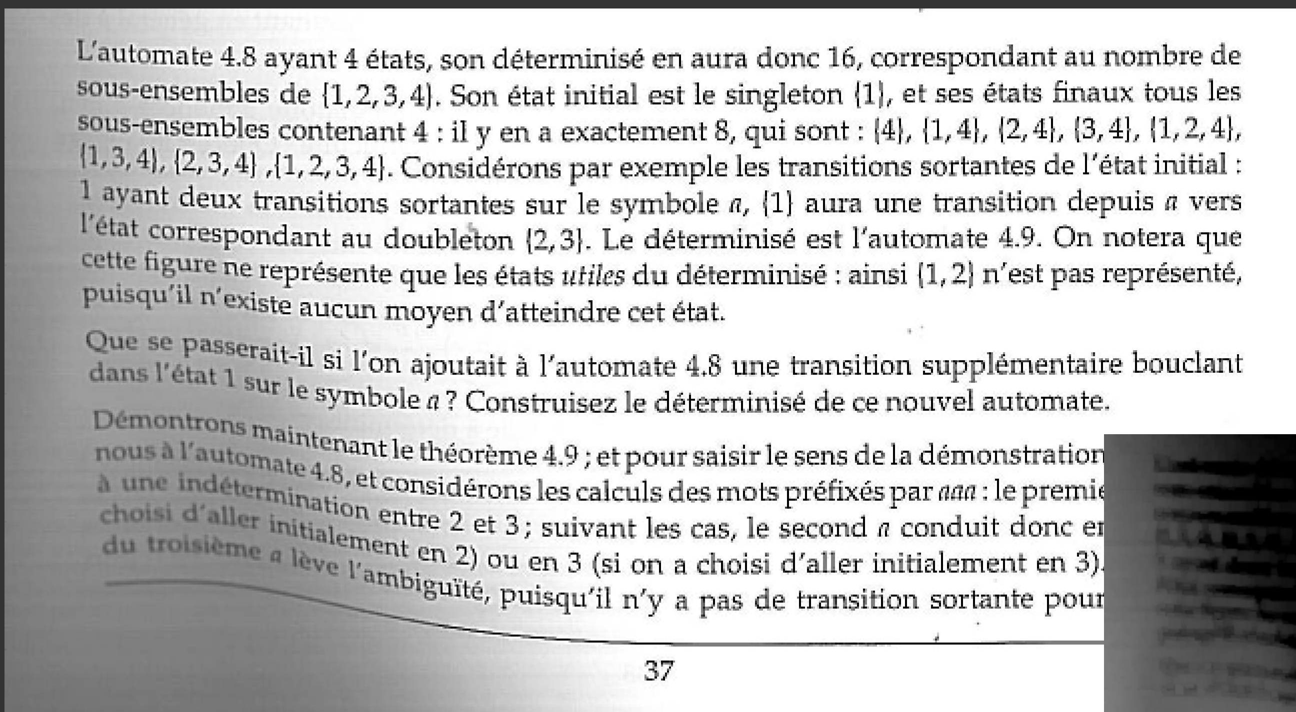
Que se passerait-il si l'on ajoutait à l'automate 4.8 une transition supplémentaire bouclant dans l'état 1 sur le symbole *a* ? Construisez le déterminisé de ce nouvel automate.

Démontrons maintenant le théorème 4.9 ; et pour saisir le sens de la démonstration, reportons nous à l'automate 4.8, et considérons les calculs des mots préfixés par *aaa* : le premier *a* conduit à une indétermination entre 2 et 3 ; suivant les cas, le second *a* conduit donc en 4 (si on a choisi d'aller initialement en 2) ou en 3 (si on a choisi d'aller initialement en 3). La lecture du troisième *a* lève l'ambiguïté, puisqu'il n'y a pas de transition sortante pour 4 : le seul

37

Utilisation de l'ouverture : Top Hat

- Résultat



L'automate 4.8 ayant 4 états, son déterminisé en aura donc 16, correspondant au nombre de sous-ensembles de {1,2,3,4}. Son état initial est le singleton {1}, et ses états finaux tous les sous-ensembles contenant 4 : il y en a exactement 8, qui sont : {4}, {1,4}, {2,4}, {3,4}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4} ,{1,2,3,4}. Considérons par exemple les transitions sortantes de l'état initial : 1 ayant deux transitions sortantes sur le symbole *a*, {1} aura une transition depuis *a* vers l'état correspondant au doubleton {2,3}. Le déterminisé est l'automate 4.9. On notera que cette figure ne représente que les états *utiles* du déterminisé : ainsi {1,2} n'est pas représenté, puisqu'il n'existe aucun moyen d'atteindre cet état.

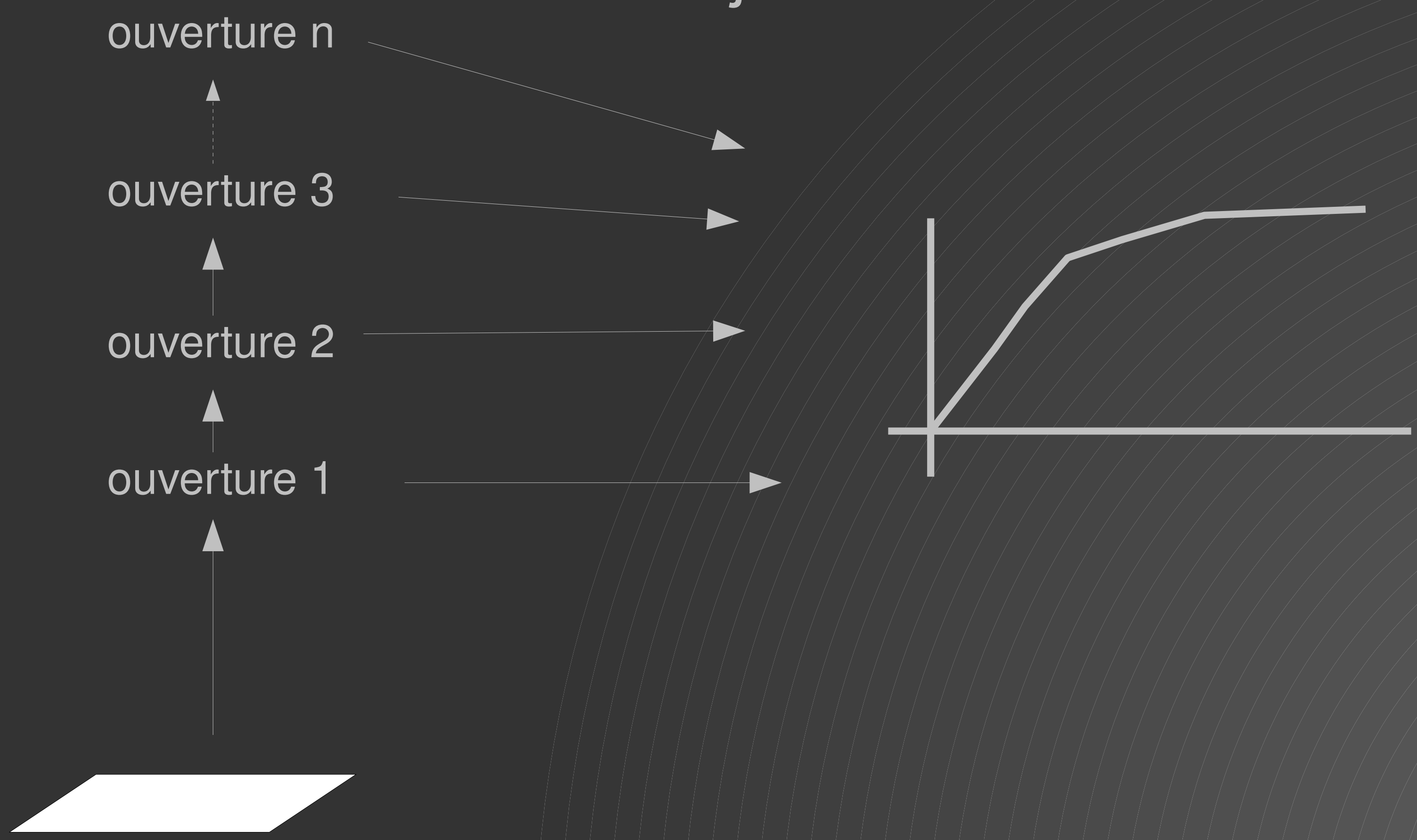
Que se passerait-il si l'on ajoutait à l'automate 4.8 une transition supplémentaire bouclant dans l'état 1 sur le symbole *a* ? Construisez le déterminisé de ce nouvel automate.

Démontrons maintenant le théorème 4.9 ; et pour saisir le sens de la démonstration nous à l'automate 4.8, et considérons les calculs des mots préfixés par *aaa* : le premie à une indétermination entre 2 et 3 ; suivant les cas, le second *a* conduit donc en choisi d'aller initialement en 2) ou en 3 (si on a choisi d'aller initialement en 3). du troisième *a* lève l'ambiguïté, puisqu'il n'y a pas de transition sortante pour

37

Utilisation de l'ouverture : Granulométrie

- Granulométrie
  - Etude de la taille des objets : utilisation d'un « tamis »



Autres filtres

- Filtres morphologiques
  - Filtre croissant et idempotent sur un treillis
    - Exemple : ouvertures et fermetures
    - Les érosions et dilatations ne sont donc pas des filtres morphologiques
- Filtres obtenus par combinaisons de filtres
  - Filtres en série
    - Filtres alternés
    - Filtres alternés séquentiels
  - Filtres en parallèle
    - Résultats des différents filtres combinés par un sup/inf

Autres filtres
Combinaison série

- Filtres alternés
  - Combinaisons de deux primitives :
    - Ouverture O et Fermeture F
      - O <= OFO <= FO/OF <= FOF <=F
      - (aucune autre combinaison à cause de l'idempotence)

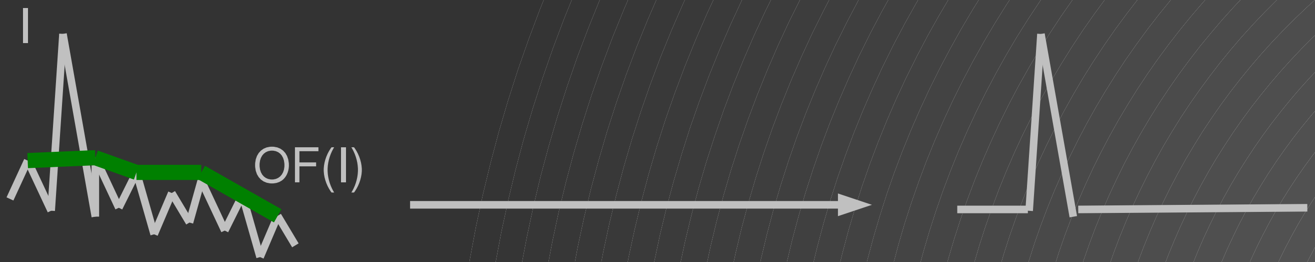
- Filtres alternés séquentiels
  - Combinaison de deux familles de primitives
    - $O_3F_3\ O_2F_2\ O_1F_1$

Autres filtres
Extension du Top Hat

- On utilise l'ouverture O d'une fermeture F
  - Pour un signal I : OF(I) ∧ I
  - L'extension du top hat est défini par le résidu :
    - I - (OF(I) ∧ I)

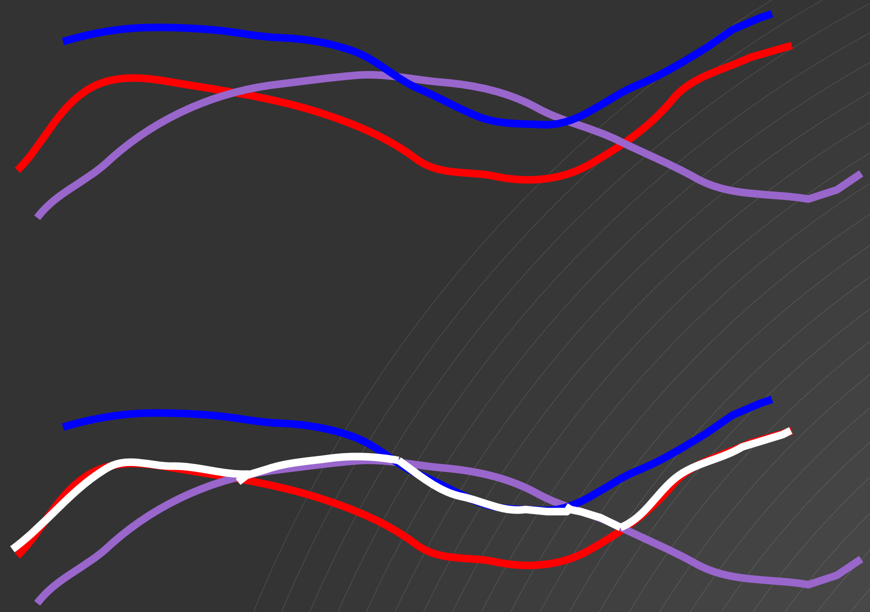
Autres filtres
Extension du Top Hat

- Utilisation :
  - Fait ressortir les pics
  - Supprime les variations denses



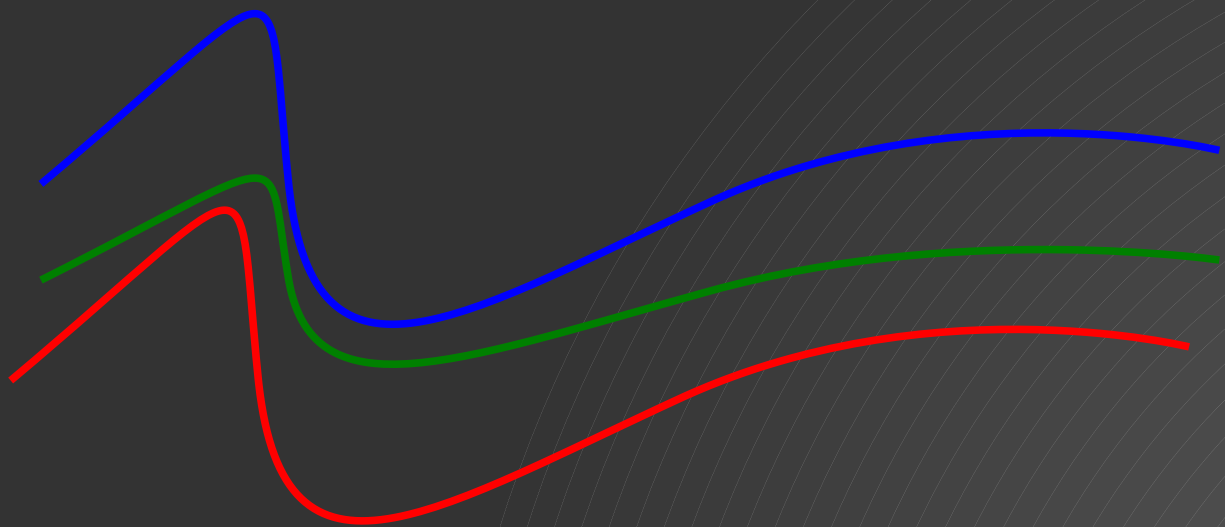
Autres filtres
Combinaison parallèle

- Le centre morphologique



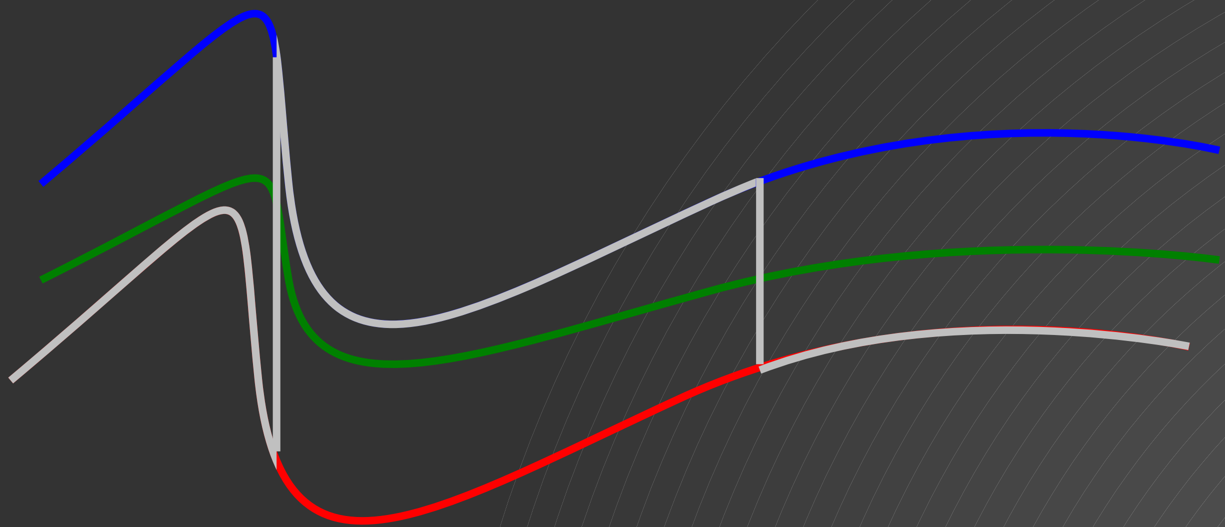
Autres filtres
Combinaison parallèle

- Toggle Mapping



Autres filtres
Combinaison parallèle

- Toggle Mapping



Autres filtres
Combinaison parallèle

- Toggle Mapping
  - Applications :
    - Contrast Mapping
    - TMMS

Contrast Mapping

- Résultats

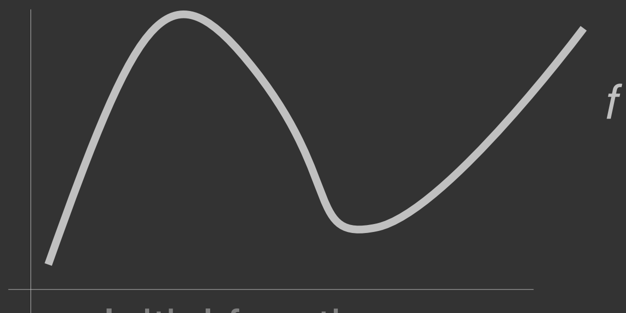
Image Originale

Laplacien

Contrast Mapping

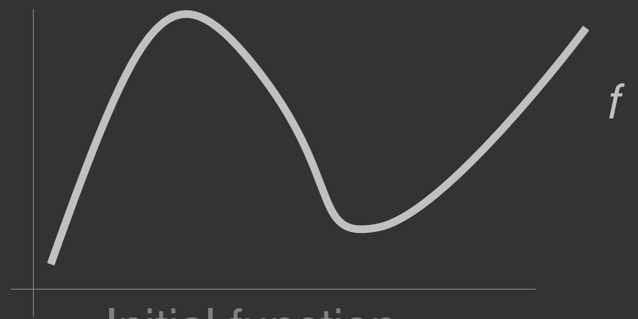
TMMS

- Segmentation

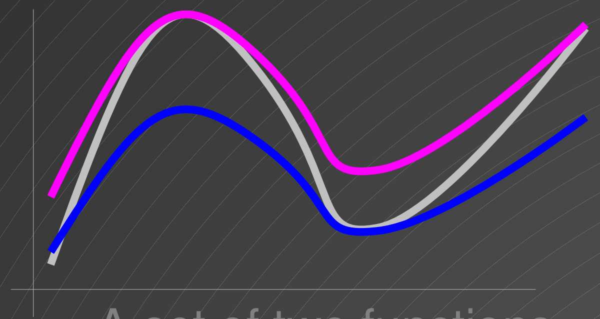


Initial function

TMMS

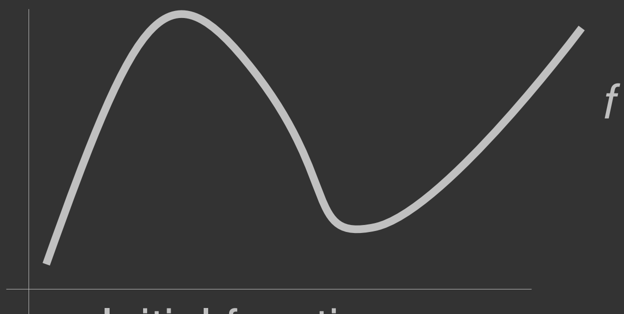


Initial function

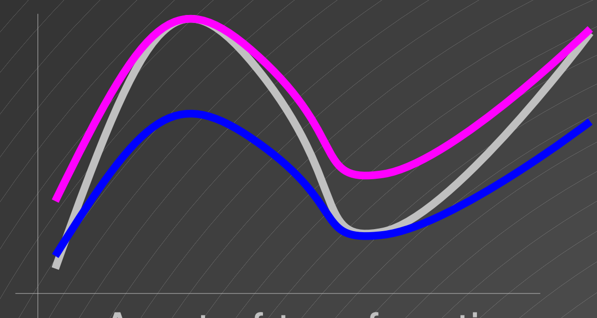


A set of two functions

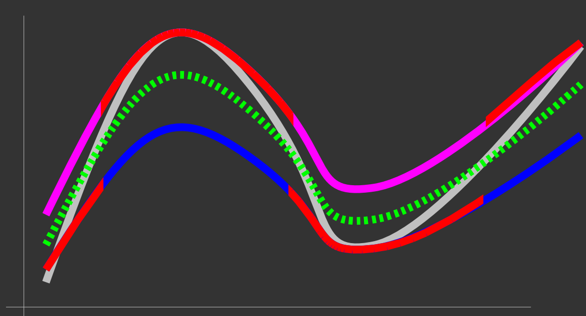
TMMS



Initial function

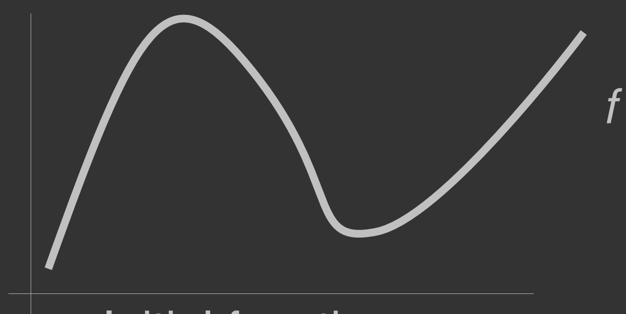


A set of two functions

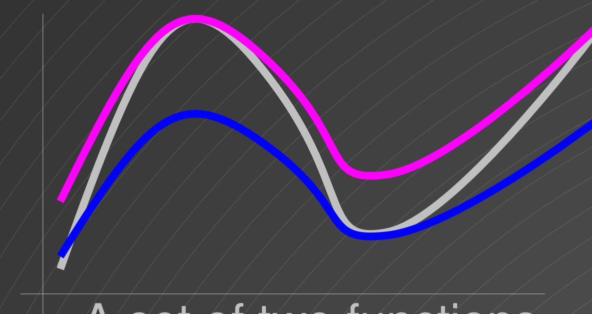


The intial function mapped on the two other functions

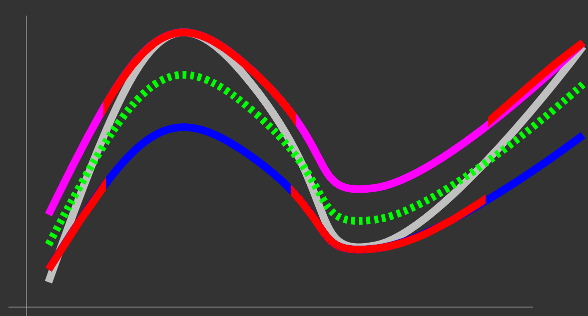
TMMS



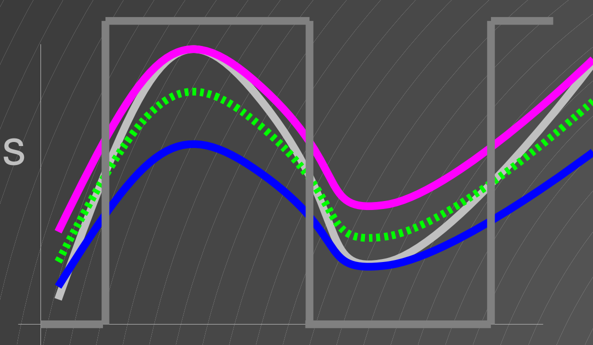
Initial function



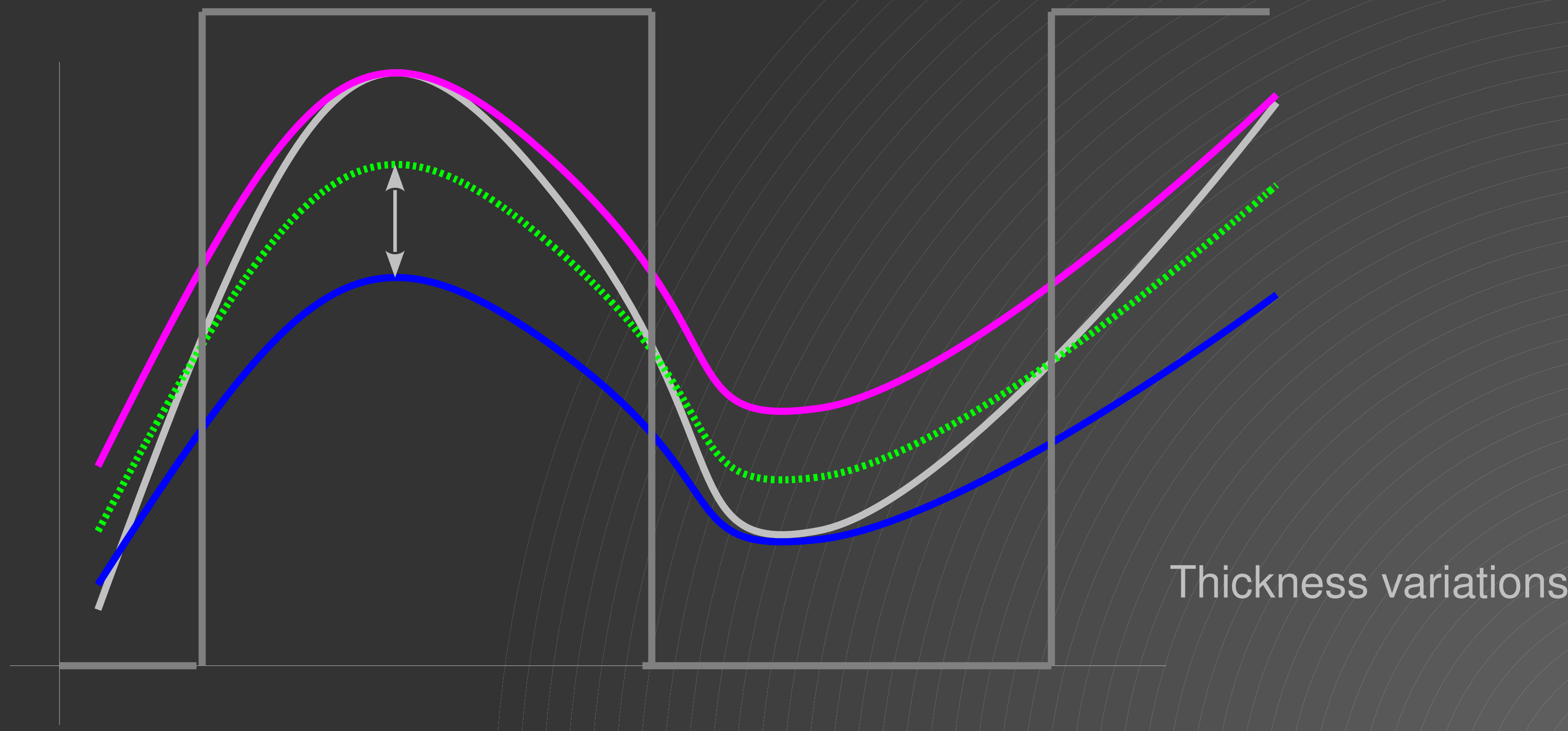
A set of two functions



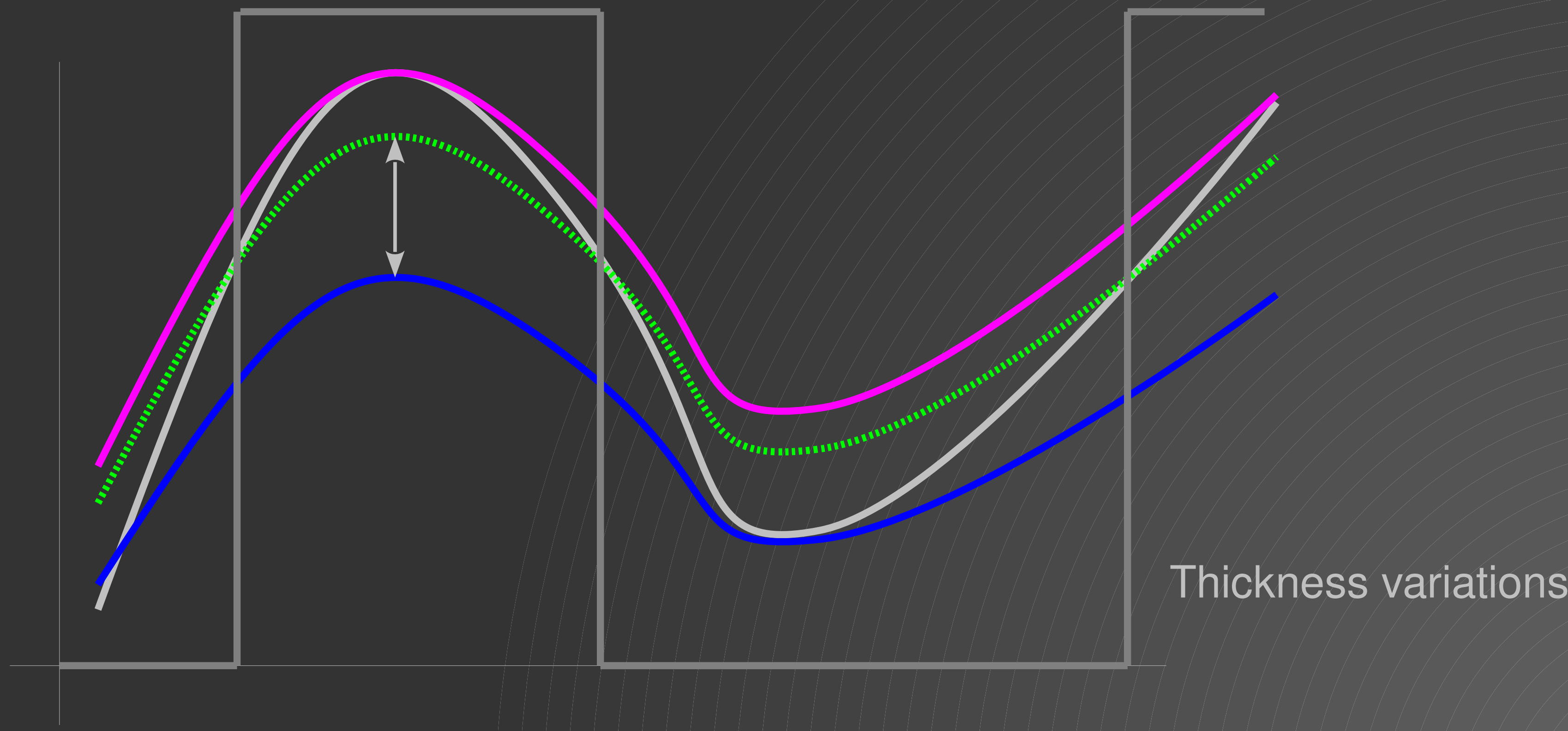
Binarisation is found by the mapping of *f* on two fonctions (erosion and dilation of *f*)



TMMS

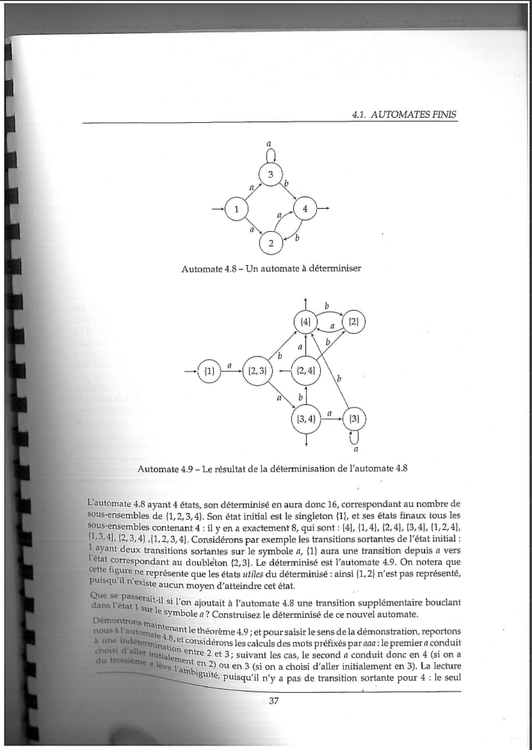


TMMS



TMMS

- Résultats



4.1. *AUTOMATES FINIS*

Automate 4.8 – Un automate à déterminiser

Automate 4.9 – Le résultat de la déterminisation de l'automate 4.8

L'automate 4.8 ayant 4 états, son déterminisé en aura donc 16, correspondant au nombre de sous-ensembles de $\{1,2,3,4\}$. Son état initial est le singleton $\{1\}$, et ses états finaux tous les sous-ensembles contenant 4 : il y en a exactement 8, qui sont : $\{4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$,$\{1,2,3,4\}$. Considérons par exemple les transitions sortantes de l'état initial : 1 ayant deux transitions sortantes sur le symbole a, $\{1\}$ aura une transition depuis a vers l'état correspondant au doubleton $\{2,3\}$. Le déterminisé est l'automate 4.9. On notera que cette figure ne représente que les états *utiles* du déterminisé : ainsi $\{1,2\}$ n'est pas représenté, puisqu'il n'existe aucun moyen d'atteindre cet état.

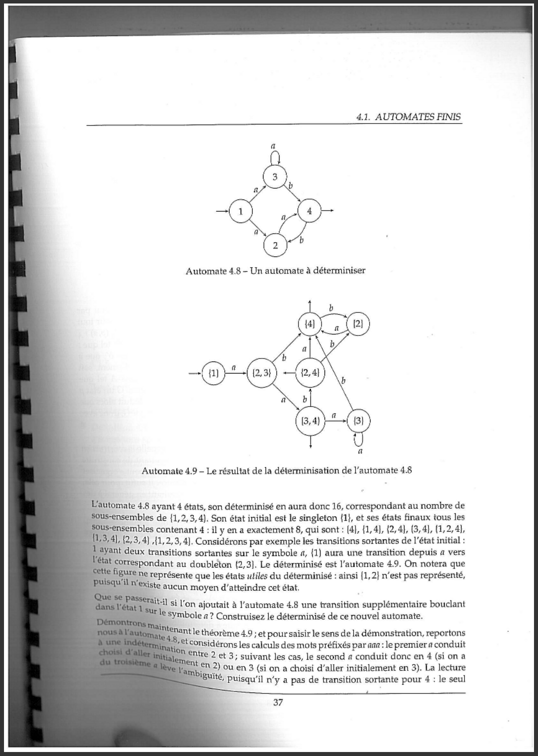
Que se passerait-il si l'on ajoutait à l'automate 4.8 une transition supplémentaire bouclant dans l'état 1 sur le symbole a ? Construisez le déterminisé de ce nouvel automate.

Démontrons maintenant le théorème 4.9 ; et pour saisir le sens de la démonstration, reportons nous à l'automate 4.8, et considérons les calculs des mots préfixés par aaa : le premier a conduit à une indétermination entre 2 et 3 ; suivant les cas, le second a conduit donc en 4 (si on a choisi d'aller initialement en 2) ou en 3 (si on a choisi d'aller initialement en 3). La lecture du troisième a lève l'ambiguïté, puisqu'il n'y a pas de transition sortante pour 4 : le seul

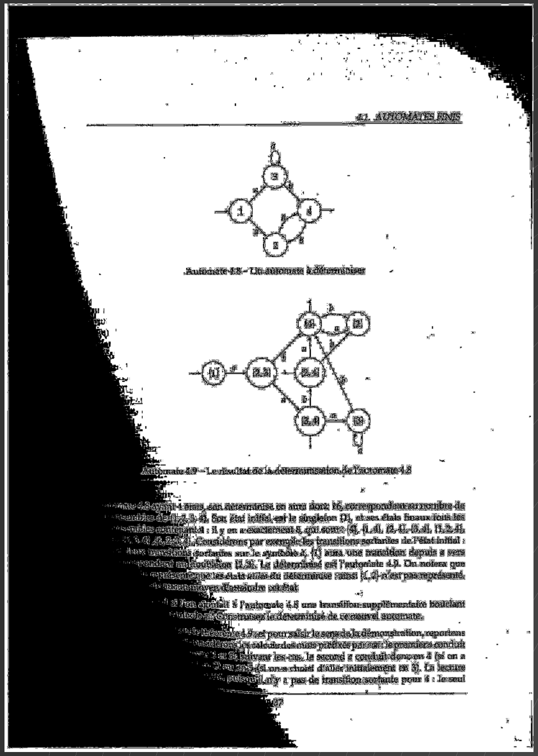
37

TMMS

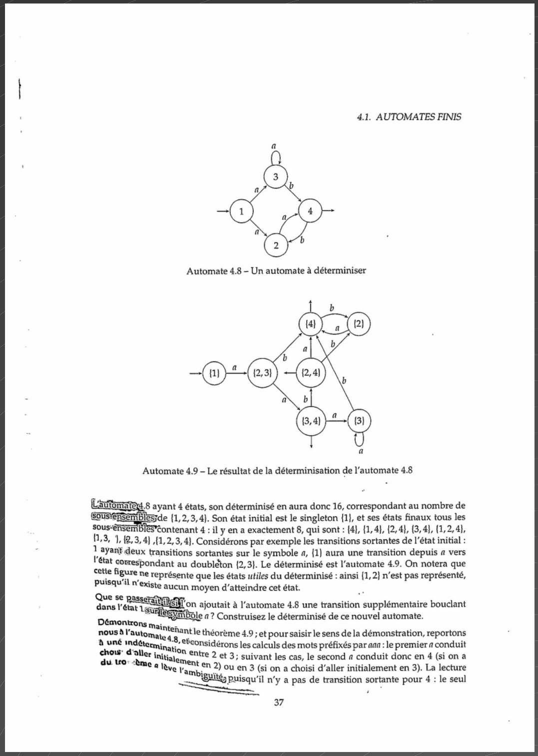
- Résultats



Original

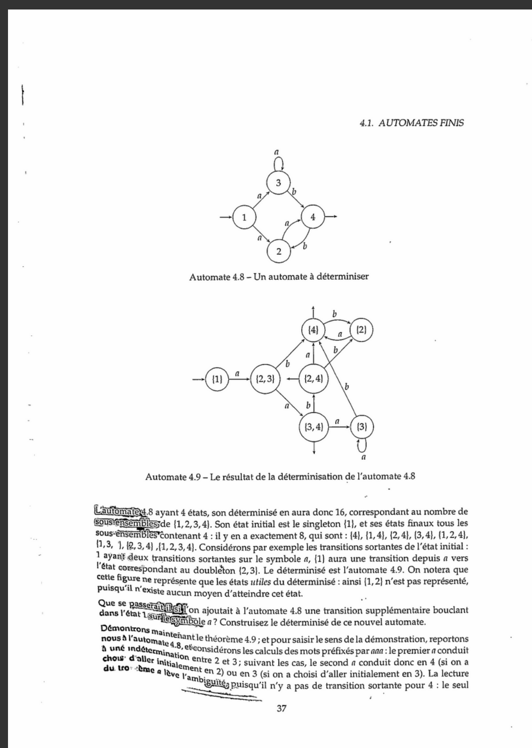


Otsu

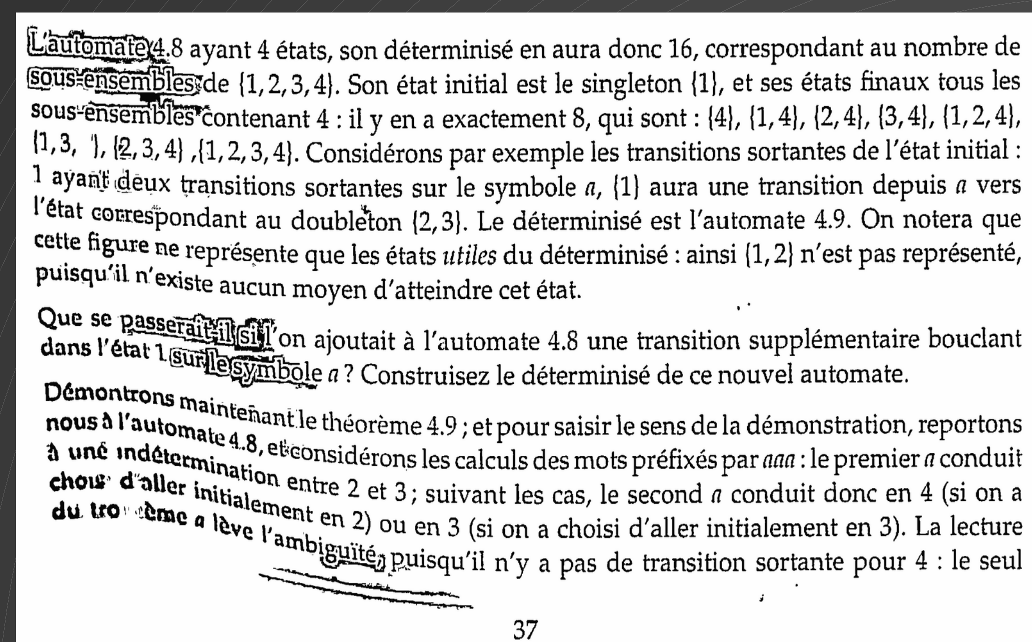


TMMS

- Résultats



TMMS



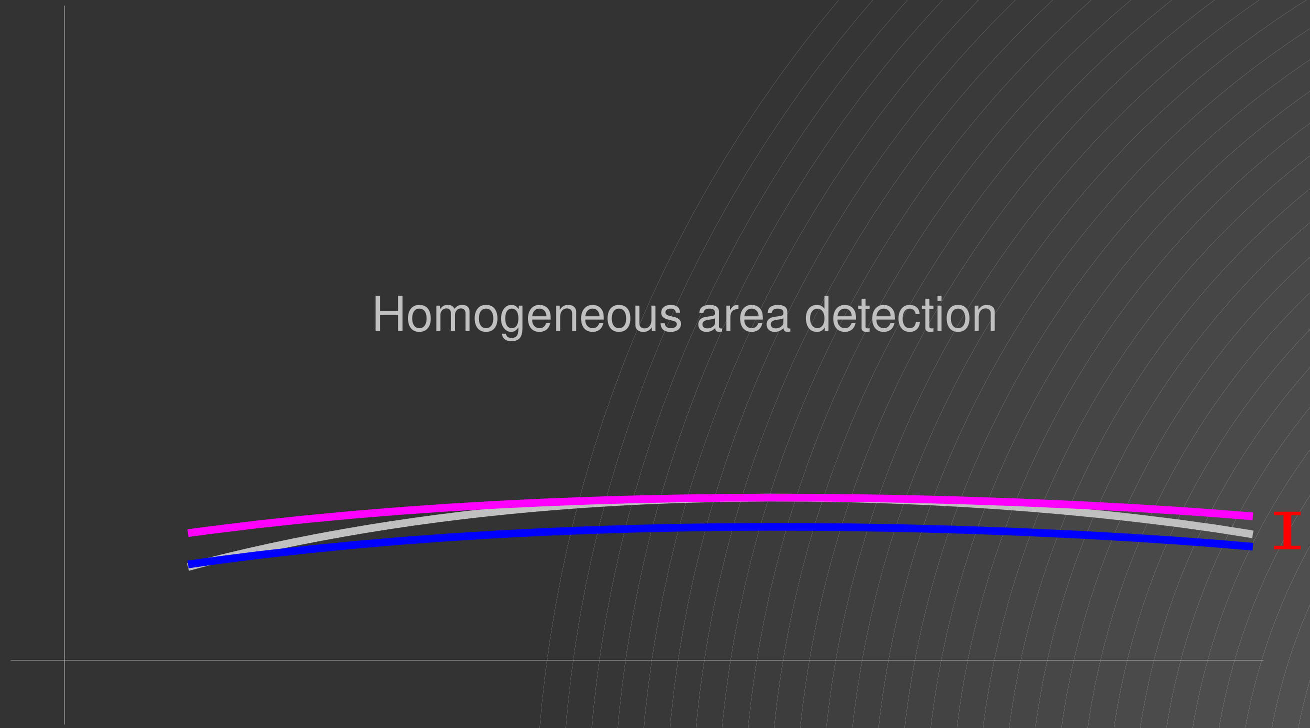
L'automate 4.8 ayant 4 états, son déterminisé en aura donc 16, correspondant au nombre de sous-ensembles de $\{1,2,3,4\}$. Son état initial est le singleton $\{1\}$, et ses états finaux tous les sous-ensembles contenant 4 : il y en a exactement 8, qui sont : $\{4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,\ \}$, $\{2,3,4\}$,$\{1,2,3,4\}$. Considérons par exemple les transitions sortantes de l'état initial : 1 ayant deux transitions sortantes sur le symbole a, $\{1\}$ aura une transition depuis a vers l'état correspondant au doubleton $\{2,3\}$. Le déterminisé est l'automate 4.9. On notera que cette figure ne représente que les états *utiles* du déterminisé : ainsi $\{1,2\}$ n'est pas représenté, puisqu'il n'existe aucun moyen d'atteindre cet état.

Que se passerait-il si l'on ajoutait à l'automate 4.8 une transition supplémentaire bouclant dans l'état 1 sur le symbole a ? Construisez le déterminisé de ce nouvel automate.

Démontrons maintenant le théorème 4.9 ; et pour saisir le sens de la démonstration, reportons nous à l'automate 4.8, et considérons les calculs des mots préfixés par aaa : le premier a conduit à une indétermination entre 2 et 3 ; suivant les cas, le second a conduit donc en 4 (si on a choisi d'aller initialement en 2) ou en 3 (si on a choisi d'aller initialement en 3). La lecture du troisième a lève l'ambiguïté, puisqu'il n'y a pas de transition sortante pour 4 : le seul

37

TMMS



TMMS

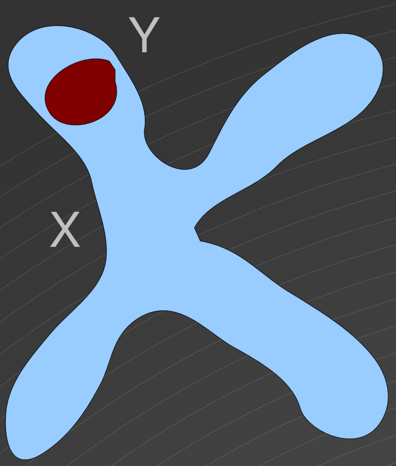
Definition of the Toggle Mapping Morphological Segmentation (TMMS) :

h_1 dilation of f
h_2 erosion of f

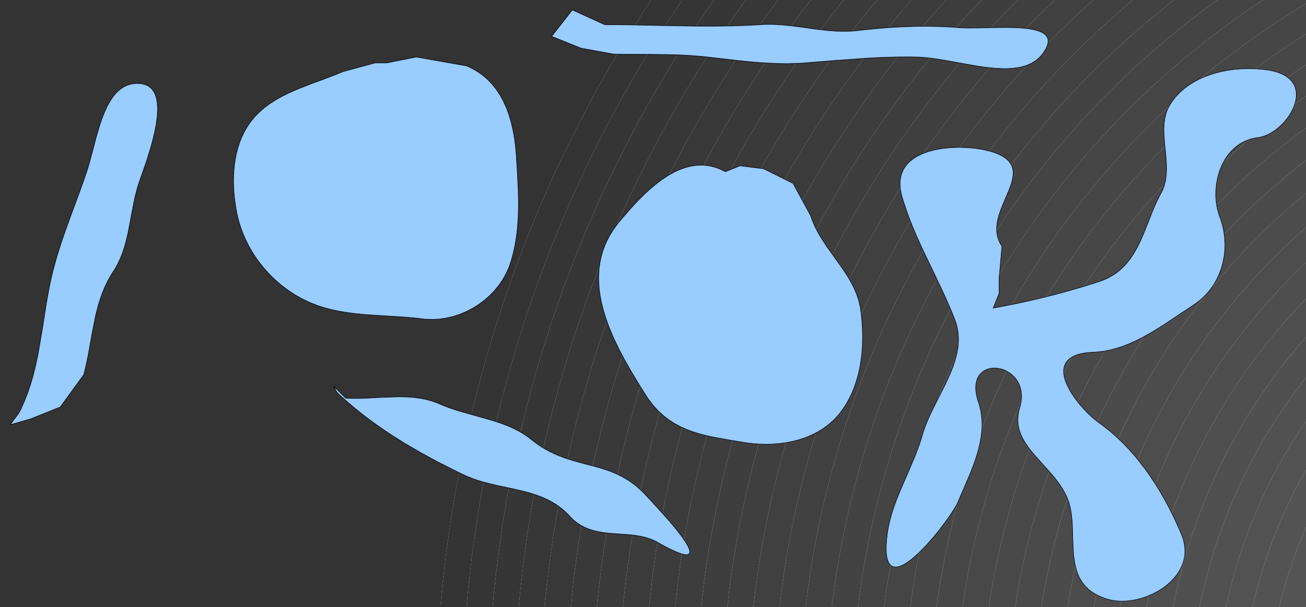
$$s(x)=\left\{\begin{array}{ll} HOMOGEOUS & if\ (h_1(x)-h_2(x))<c_{min} \\ BACKGROUND & if\ (h_1(x)-h_2(x))\geq c_{min} \wedge (f(x)-h_2(x))<p*(h_1(x)-f(x)) \\ FOREGROUND & otherwise \end{array}\right\}$$

Reconstruction

- Dilatation géodésique
  - Dil(Y) ∩ X

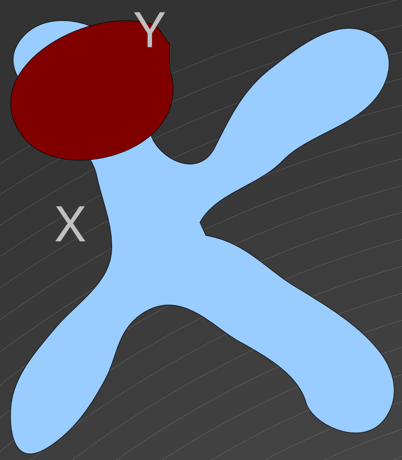


- Ouverture par reconstruction

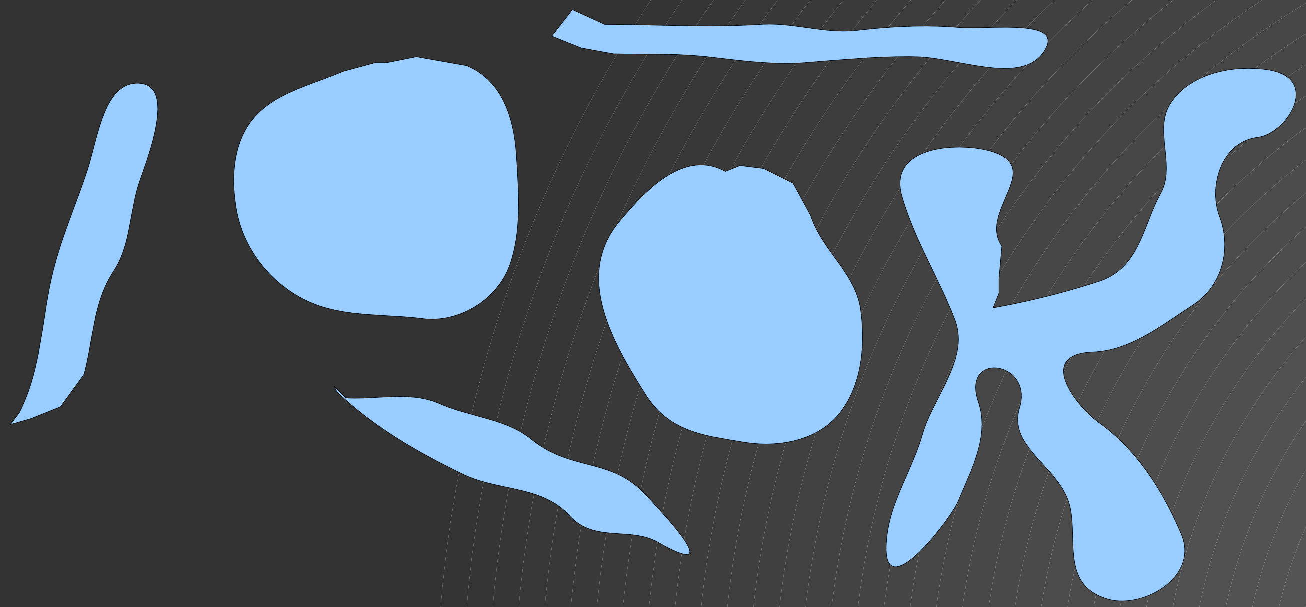


Reconstruction

- Dilatation géodésique
  - Dil(Y) ∩ X

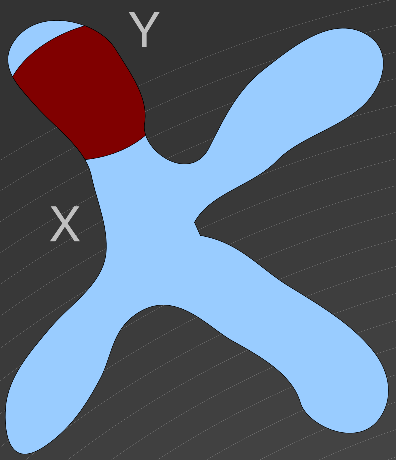


- Ouverture par reconstruction

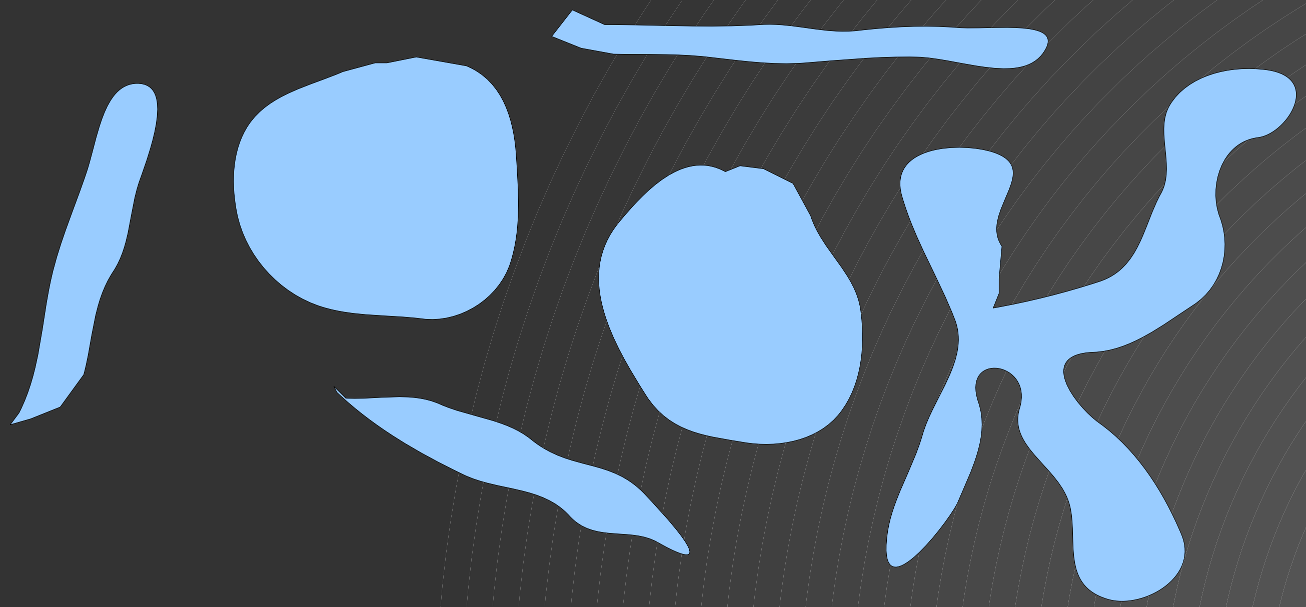


Reconstruction

- Dilatation géodésique
  - Dil(Y) ∩ X

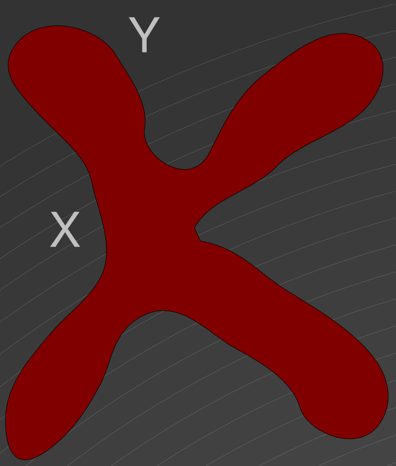


- Ouverture par reconstruction

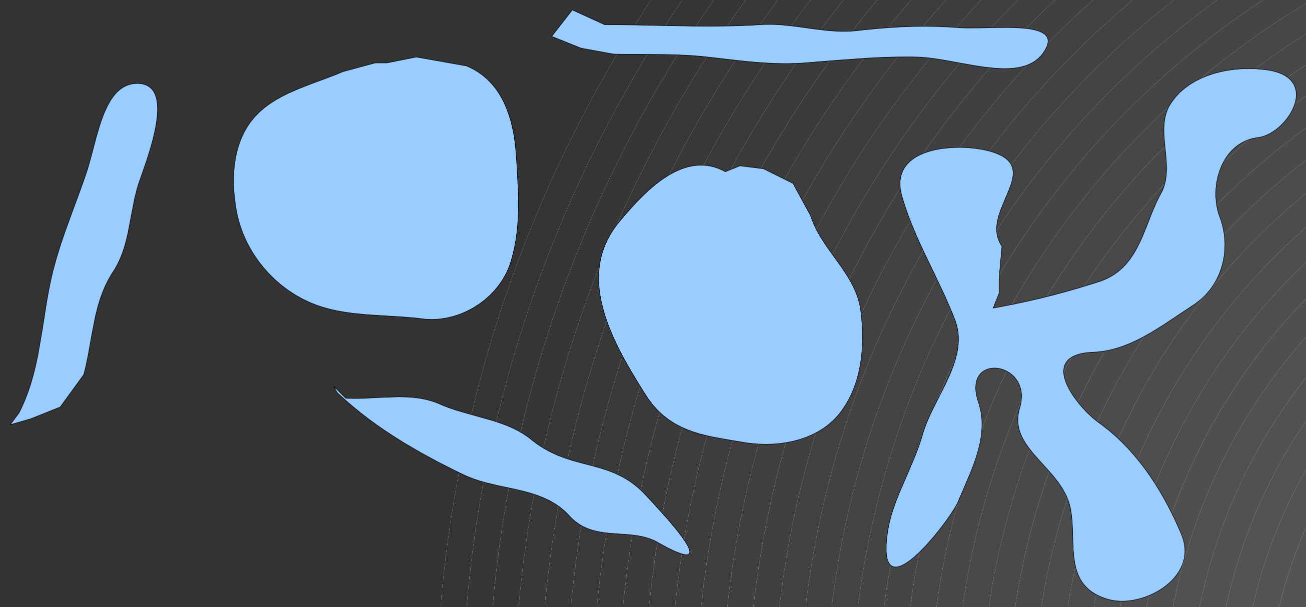


Reconstruction

- Dilatation géodésique
  - Dil(Y) ∩ X

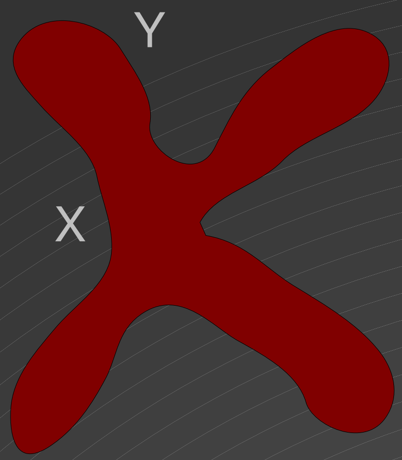


- Ouverture par reconstruction

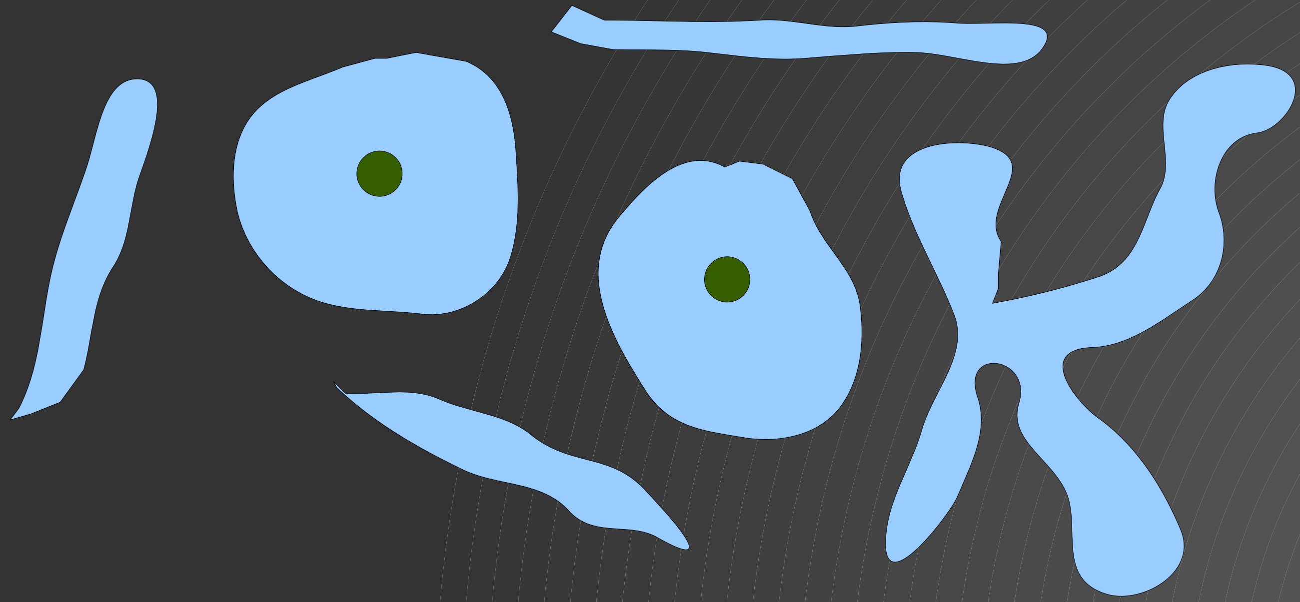


Reconstruction

- Dilatation géodésique
  - Dil(Y) ∩ X

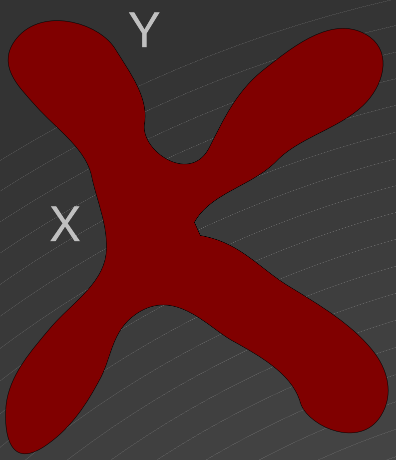


- Ouverture par reconstruction

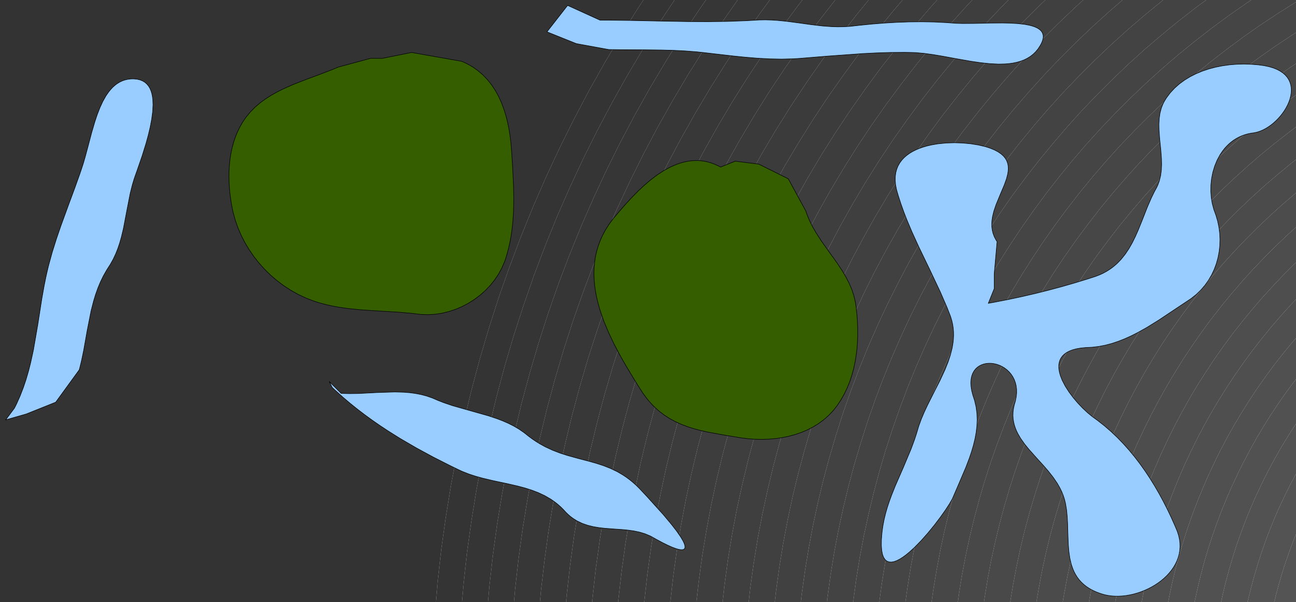


Reconstruction

- Dilatation géodésique
  - Dil(Y) ∩ X

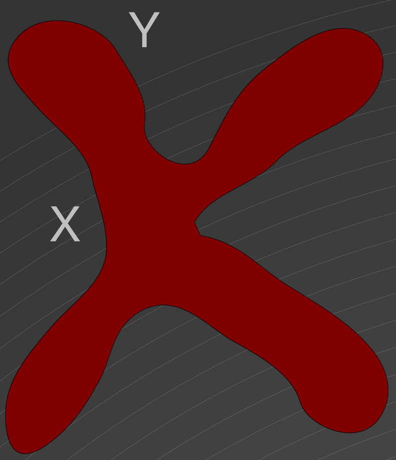


- Ouverture par reconstruction

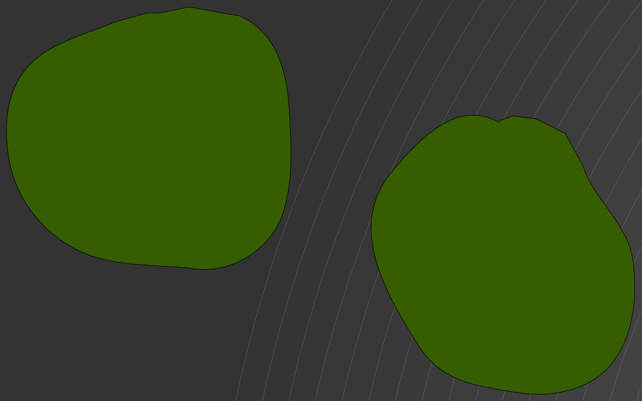


Reconstruction

- Dilatation géodésique
  - Dil(Y) ∩ X

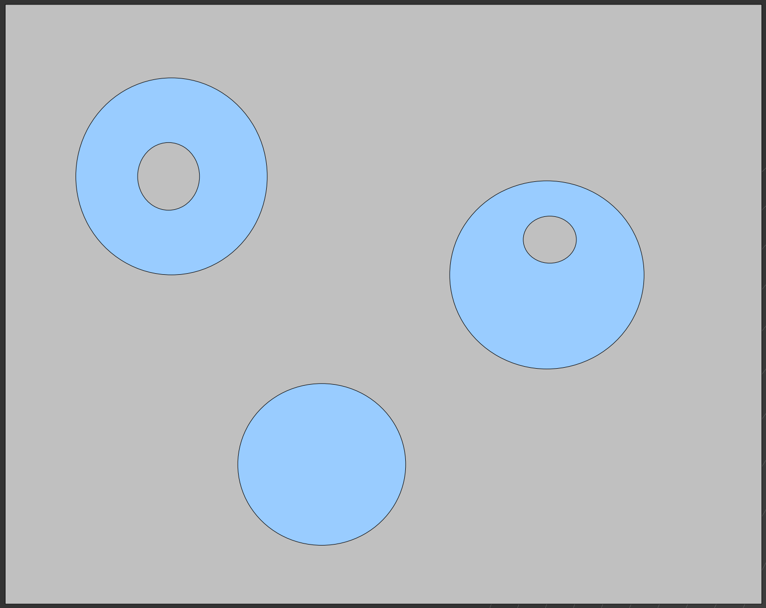


- Ouverture par reconstruction



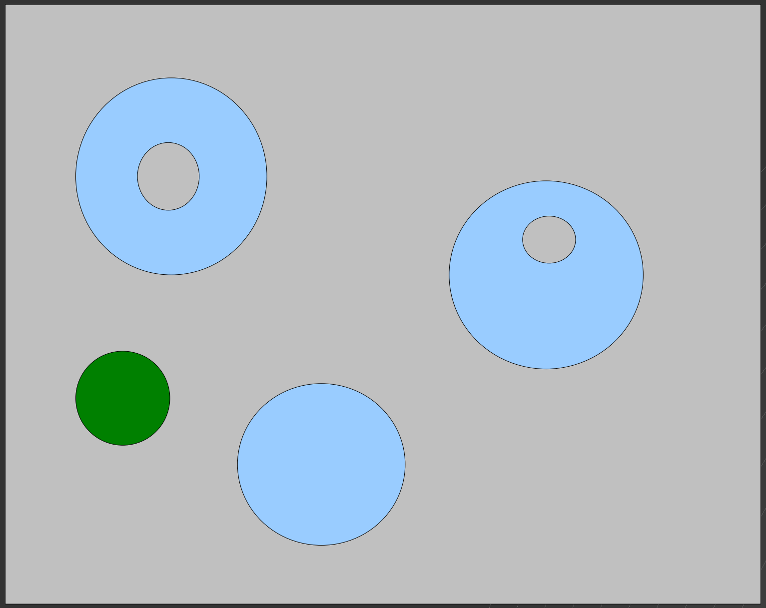
Reconstruction

- Remplissage des trous



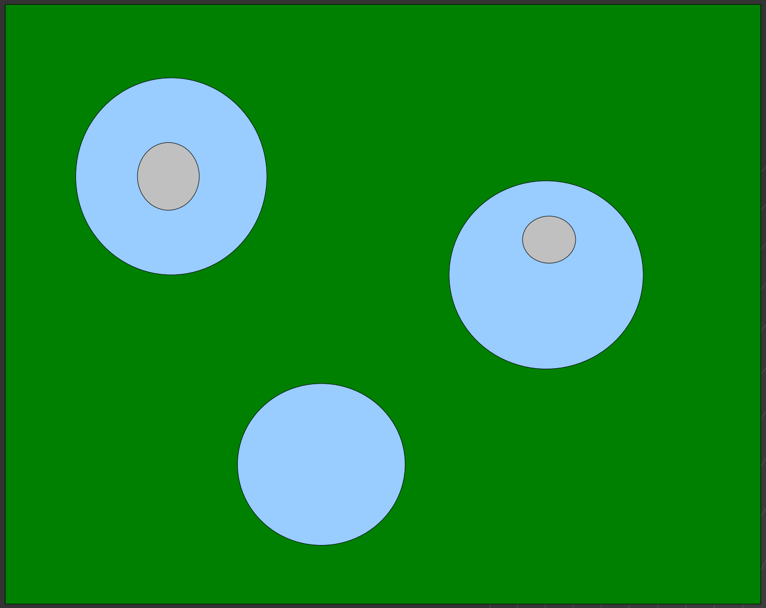
Reconstruction

- Remplissage des trous



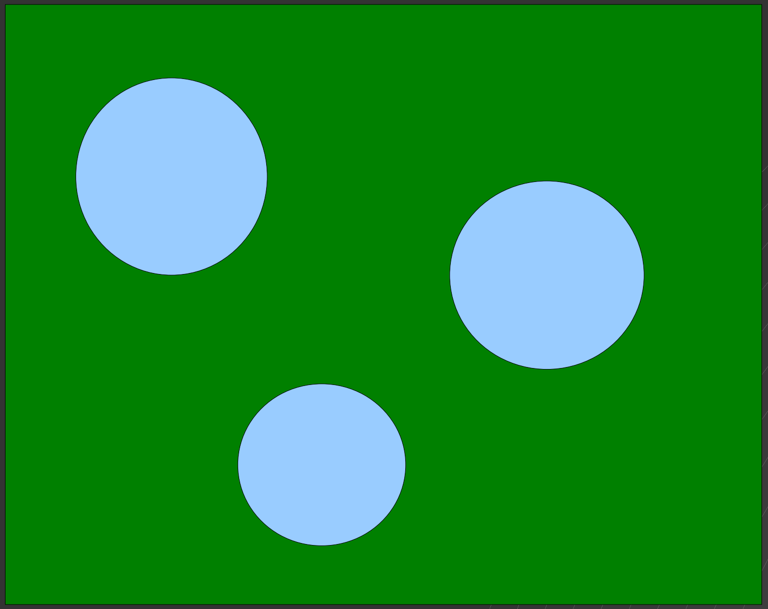
Reconstruction

- Remplissage des trous



Reconstruction

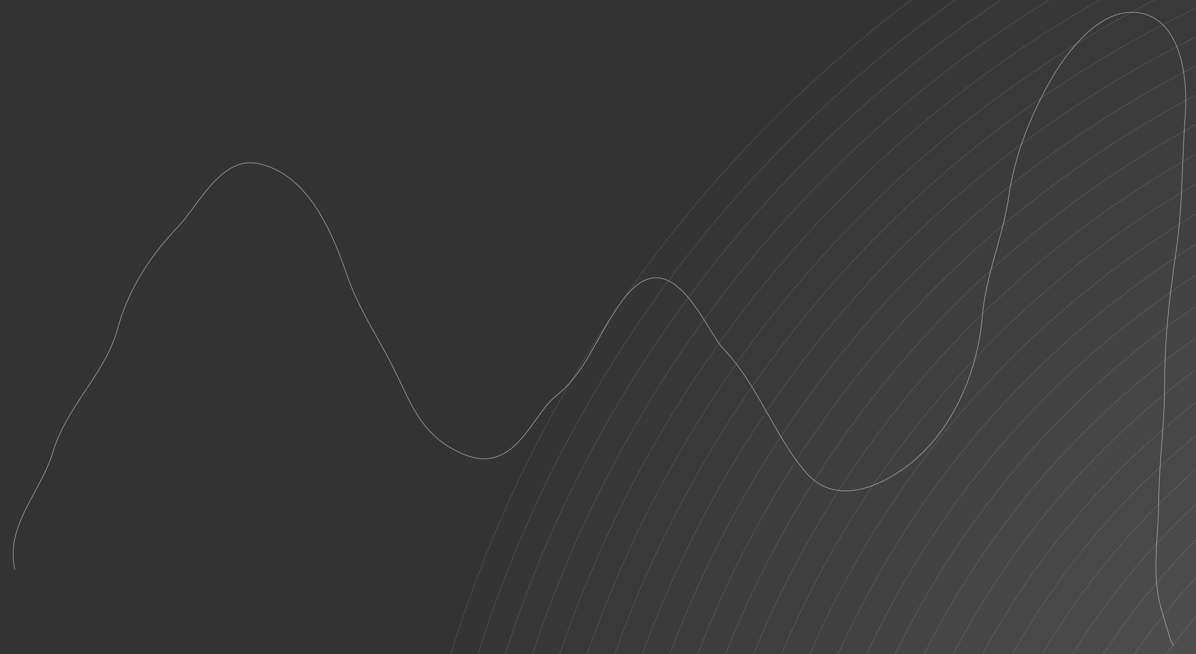
- Remplissage des trous



- Autre application : Sélection d'un objet précis

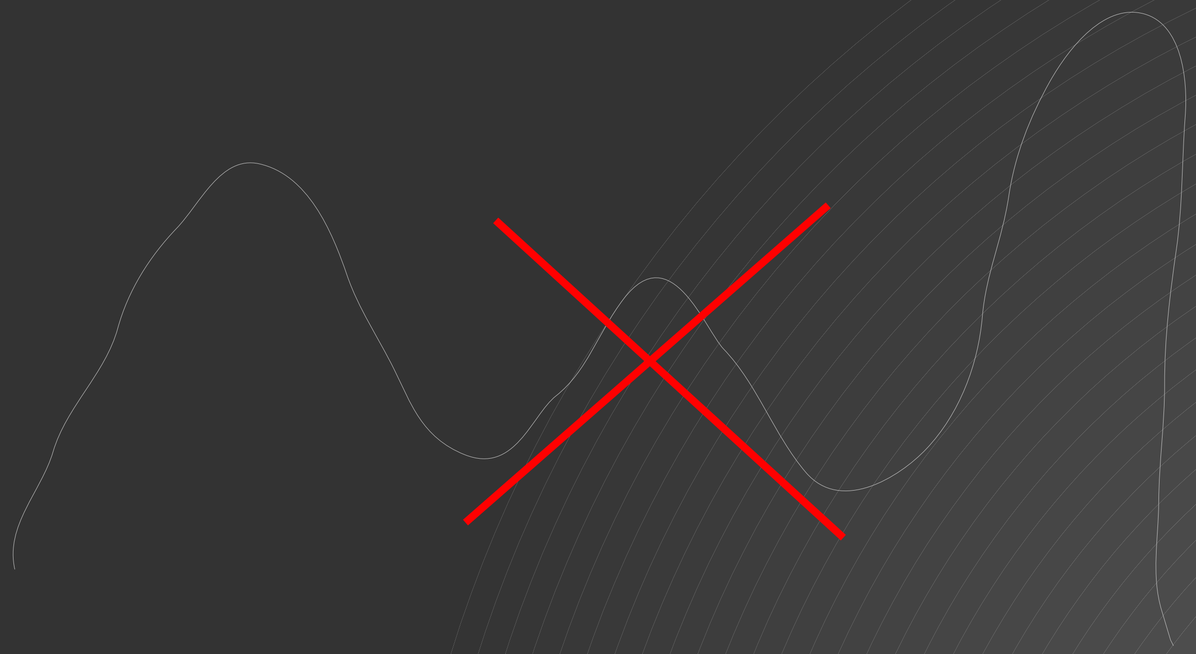
Suppression de Maxima

- Avec utilisation de marqueurs :



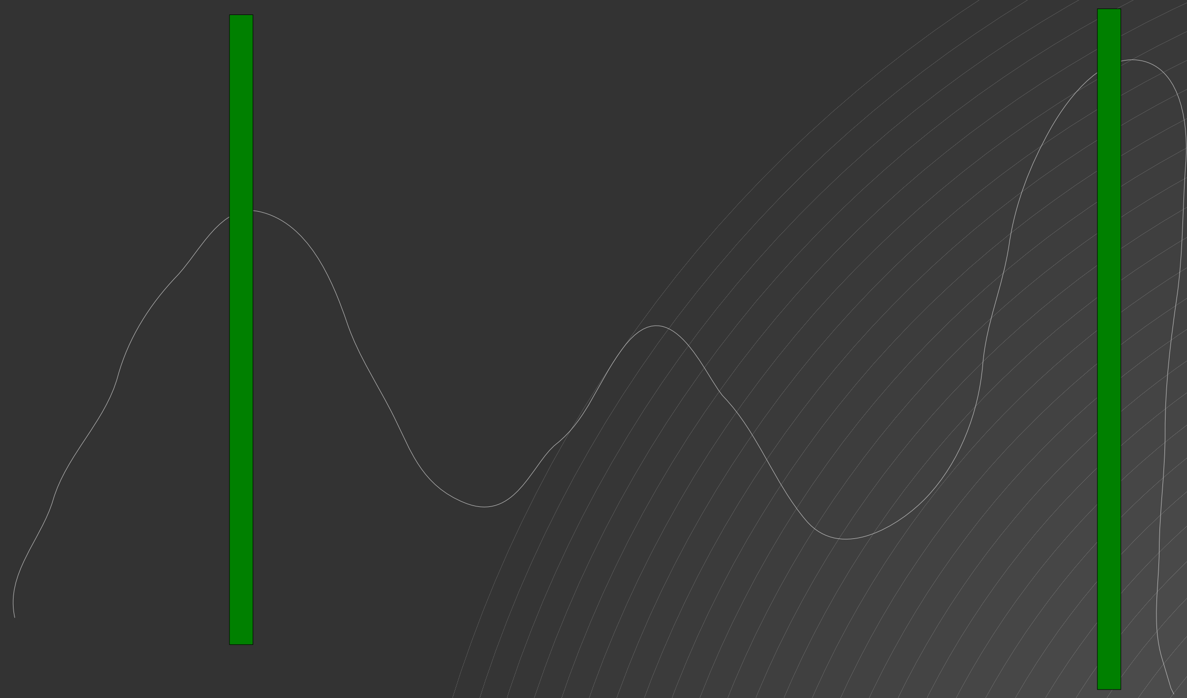
Suppression de Maxima

- Avec utilisation de marqueurs :



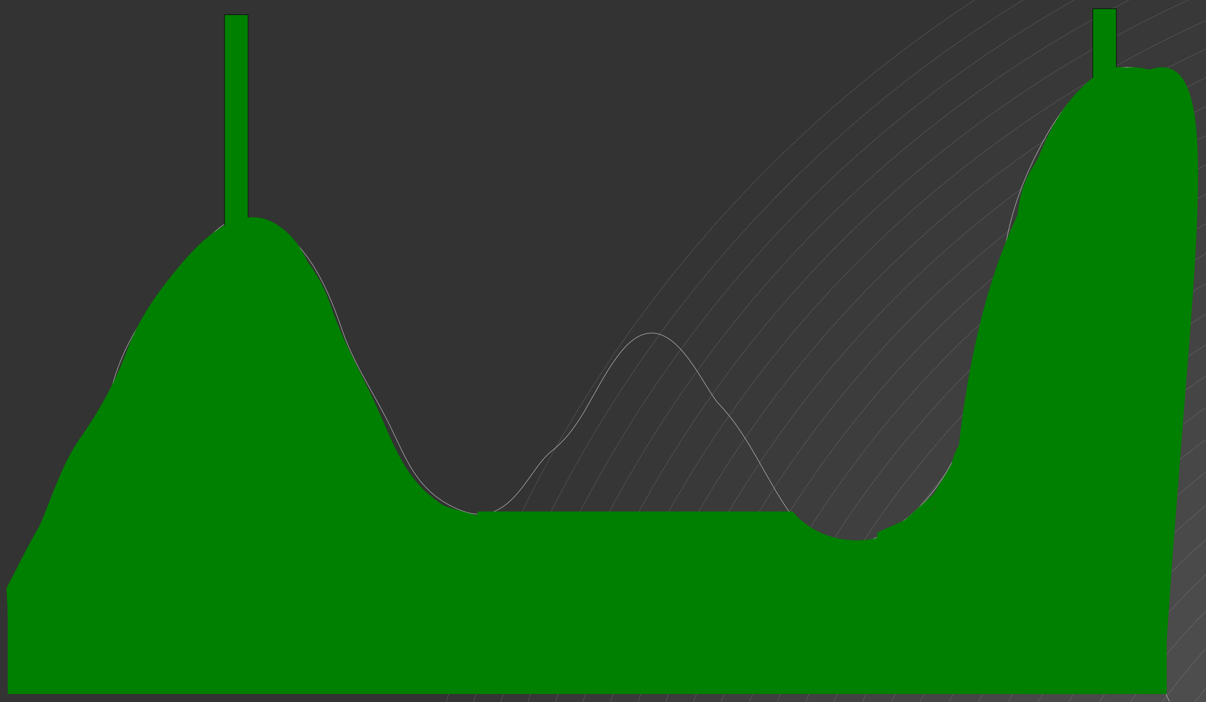
Suppression de Maxima

- Avec utilisation de marqueurs :



Suppression de Maxima

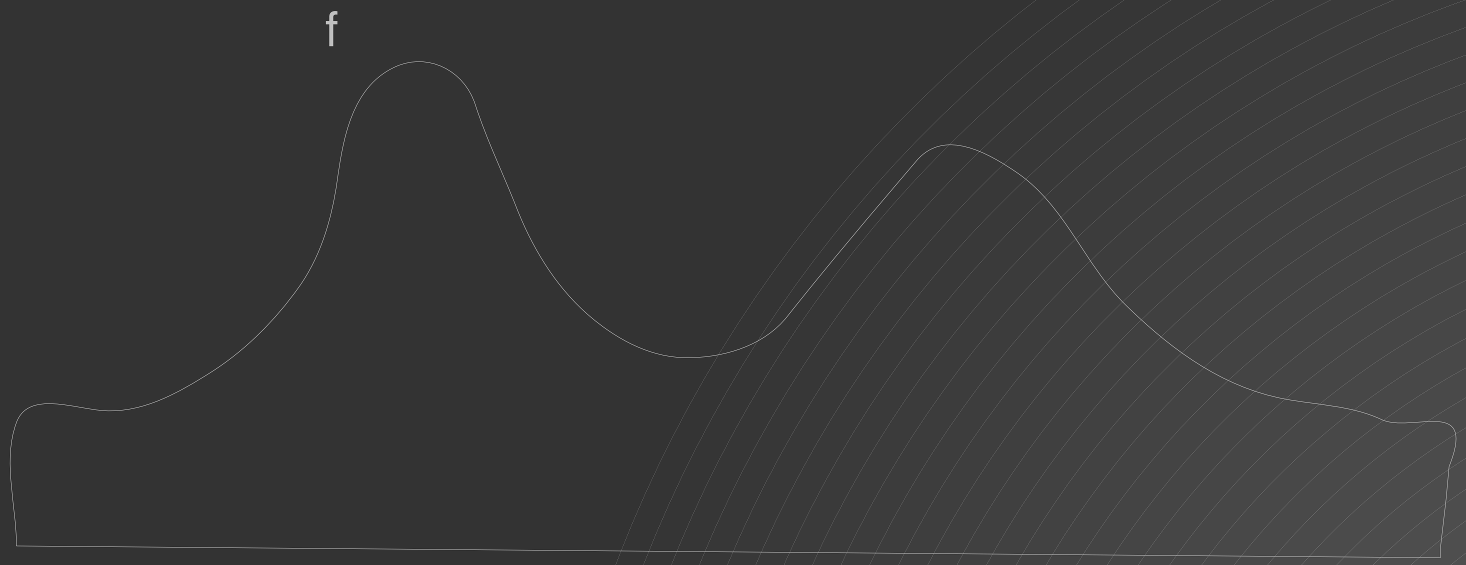
- Avec utilisation de marqueurs :



- Dilatation géodésique

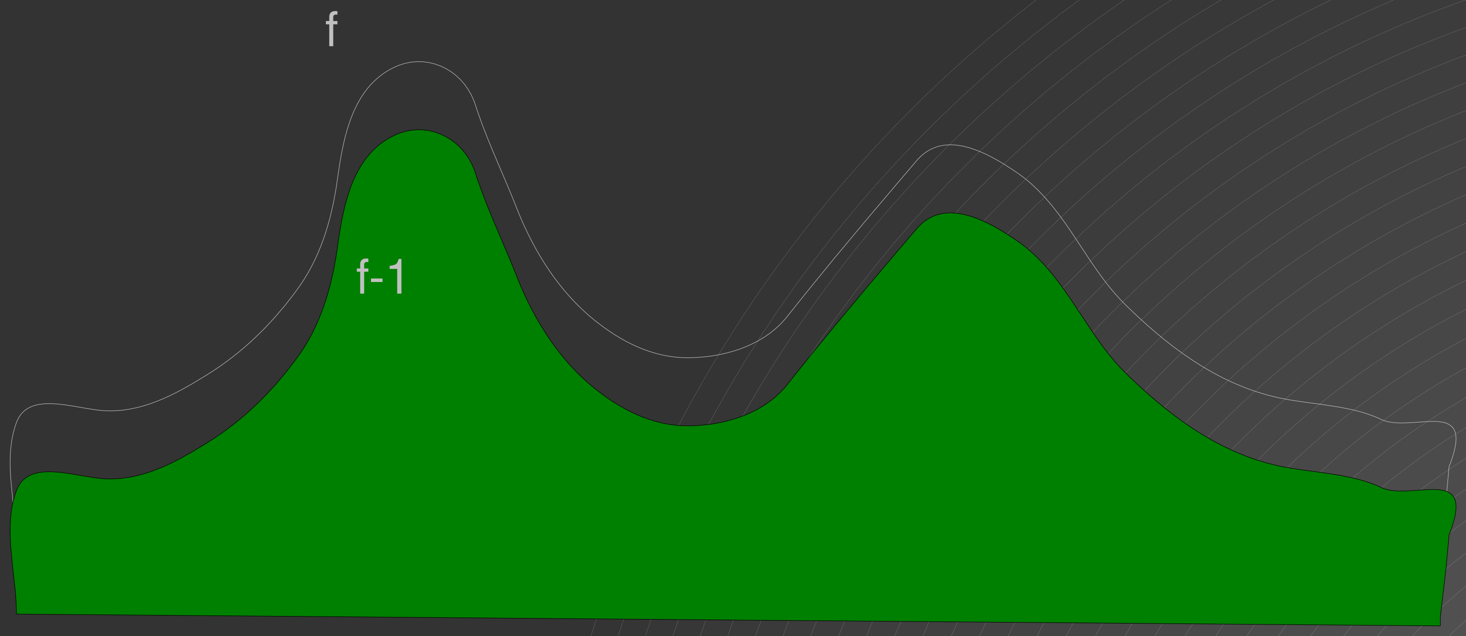
Détection de maxima locaux

- Reconstruction :



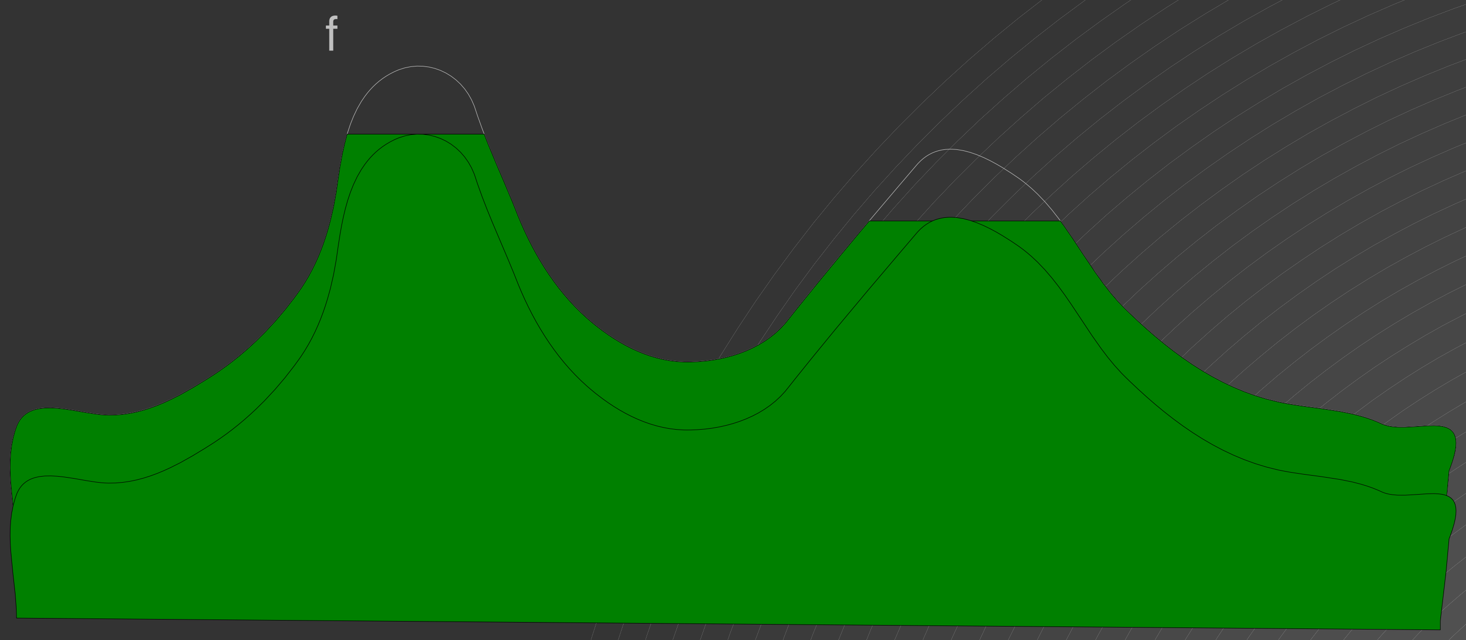
Détection de maxima locaux

- Reconstruction :



Détection de maxima locaux

- Reconstruction :



Détection de maxima locaux

- Reconstruction :

Autres opérateurs résiduels

- Ouverture ultime
- Fermeture ultime

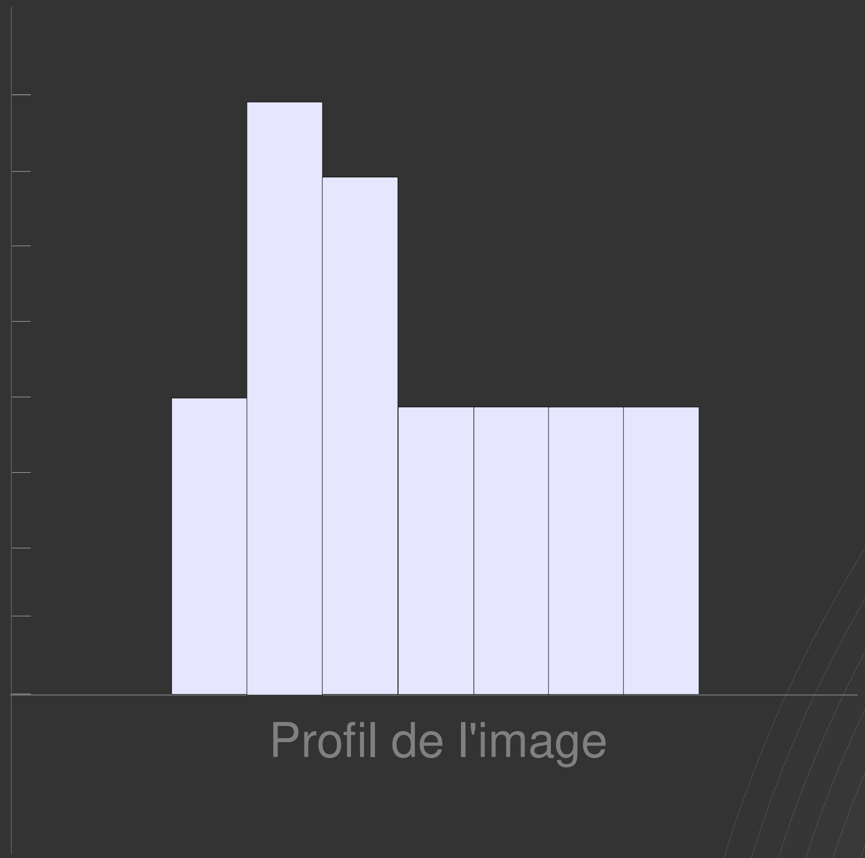
Ouverture ultime

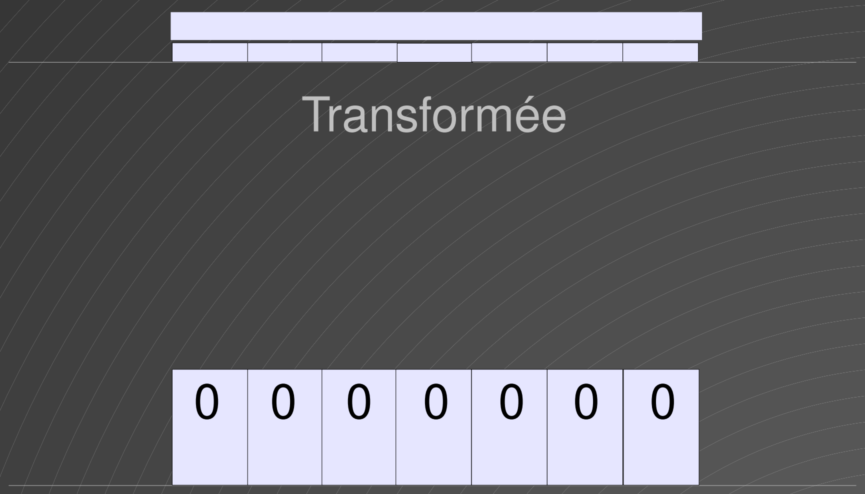
Ouverture Ultime :

- Opérateur morphologique résiduel
  - estimation du contraste (transformée)
  - estimation d'une taille de motif (indicatrice)

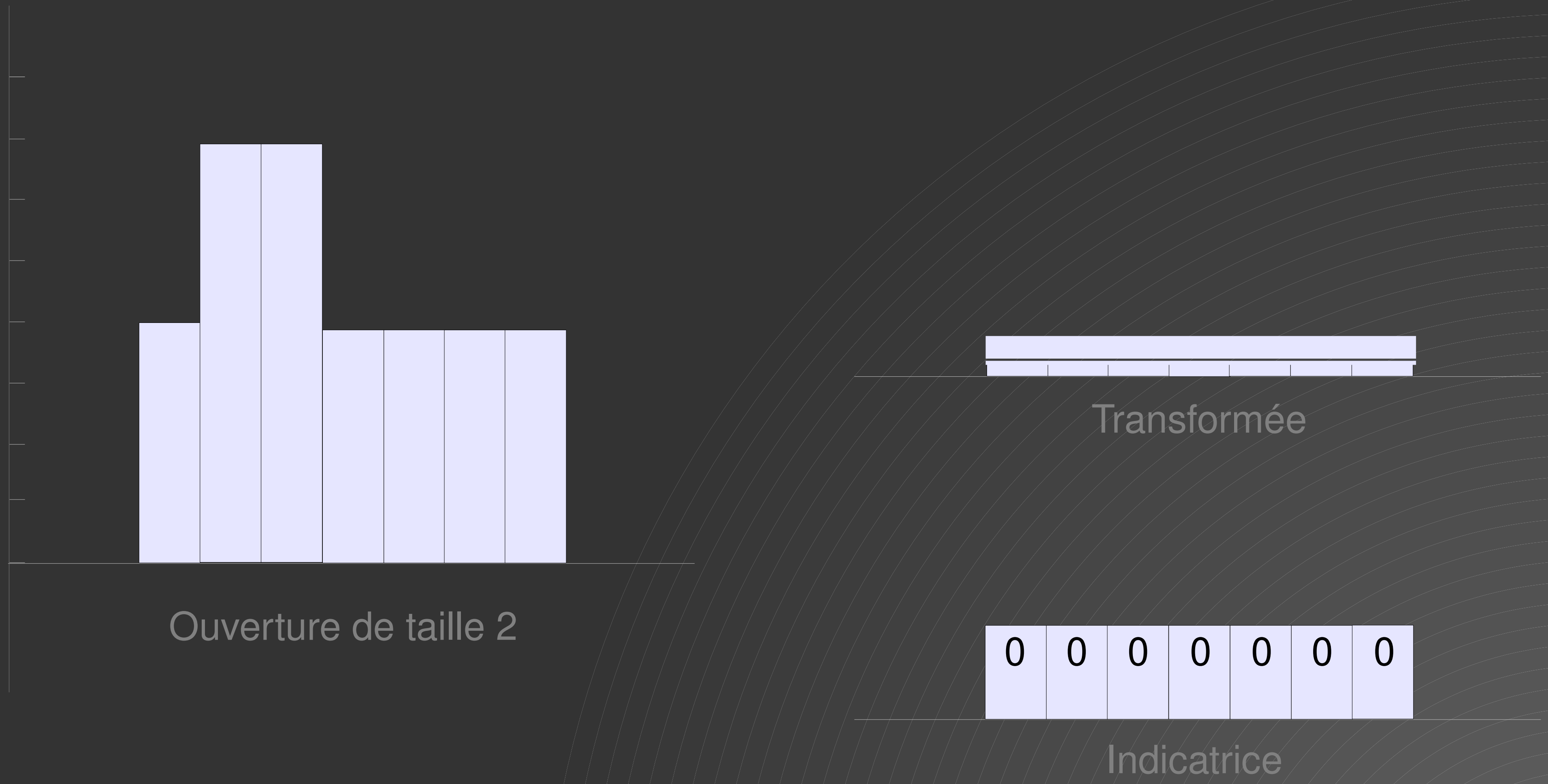
➔ Cherche, pour chaque pixel, le résidu le plus grand entre deux ouvertures successives de taille croissante

Ouverture ultime

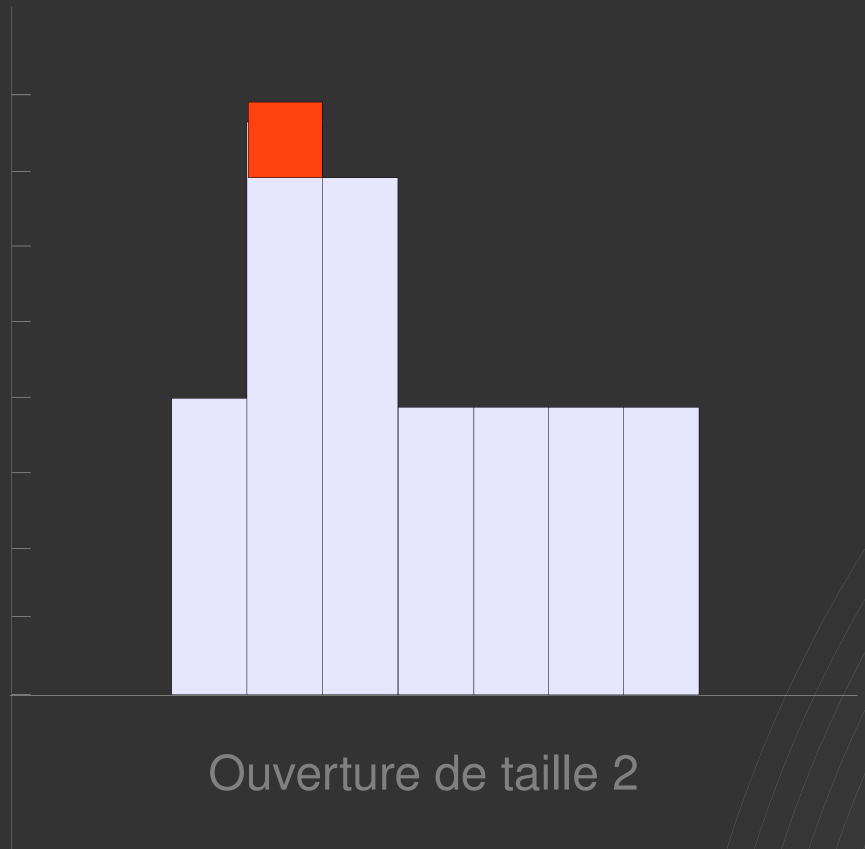


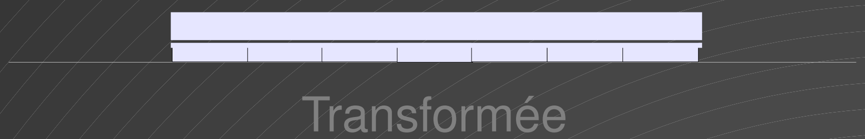


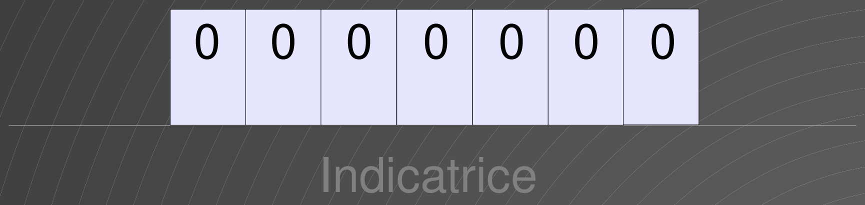
Ouverture ultime



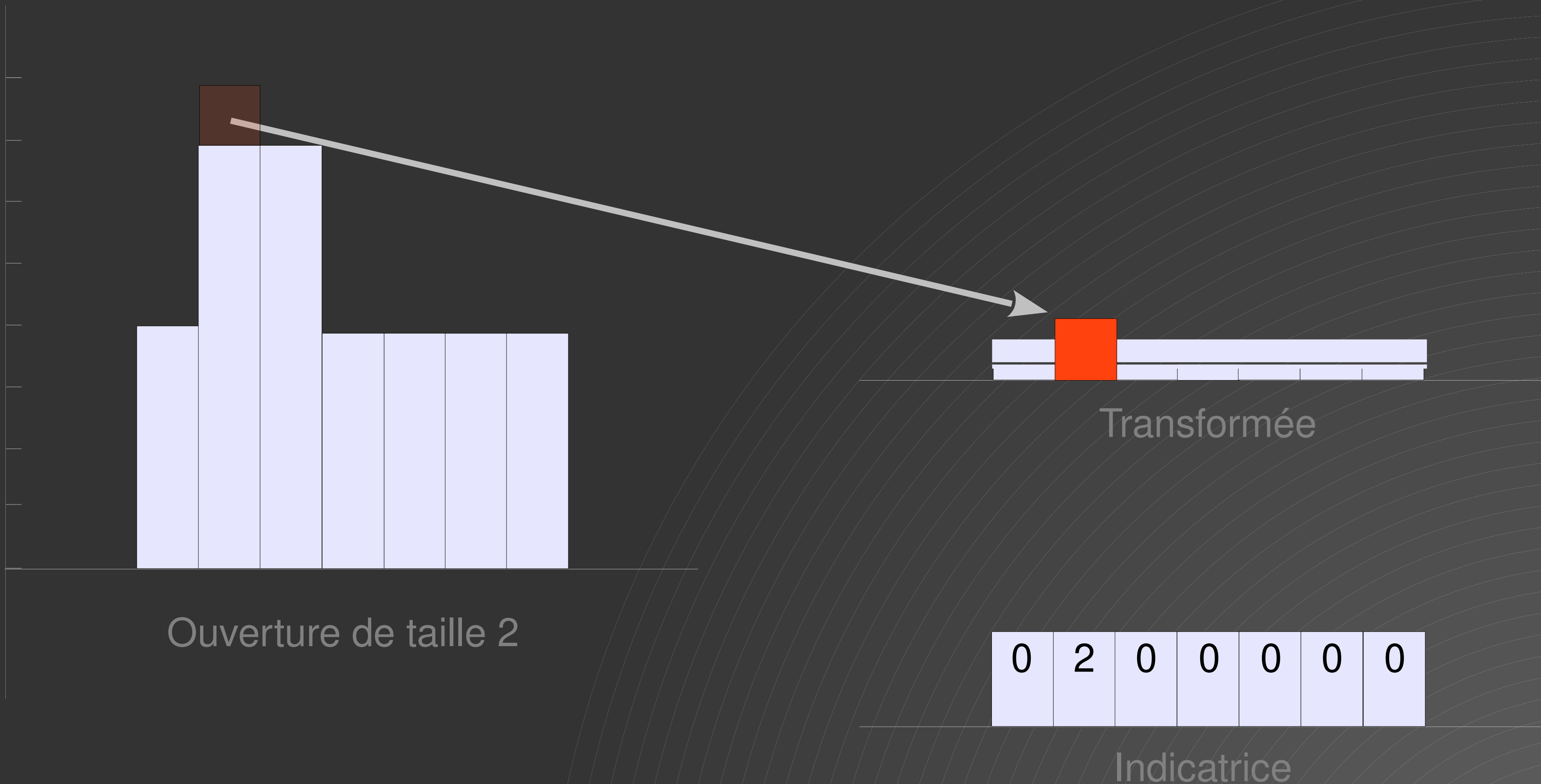
Ouverture ultime





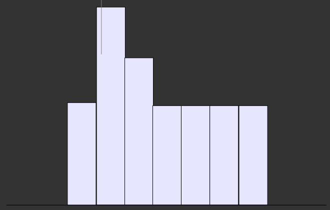


Ouverture ultime

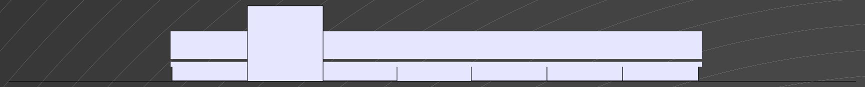


Ouverture ultime

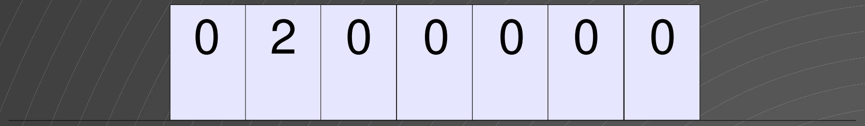
Ouverture de taille 3



Profil original

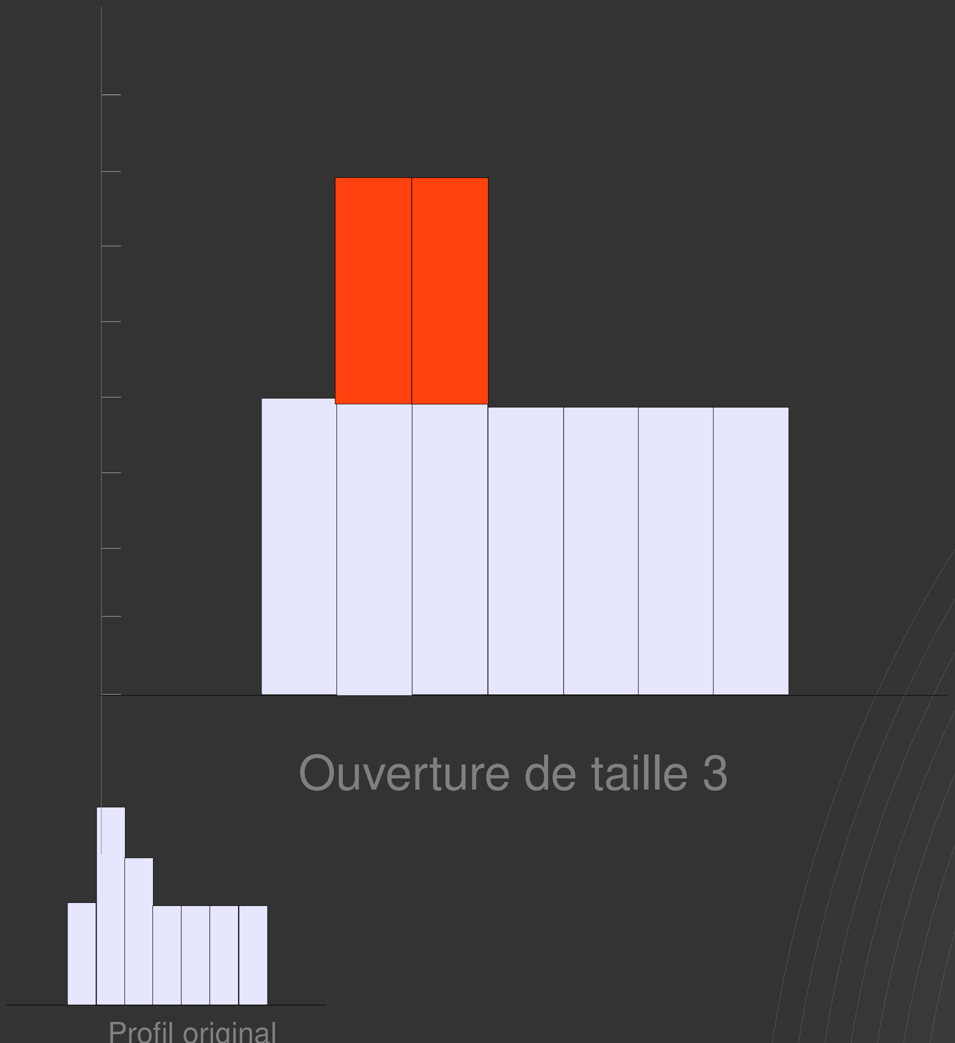


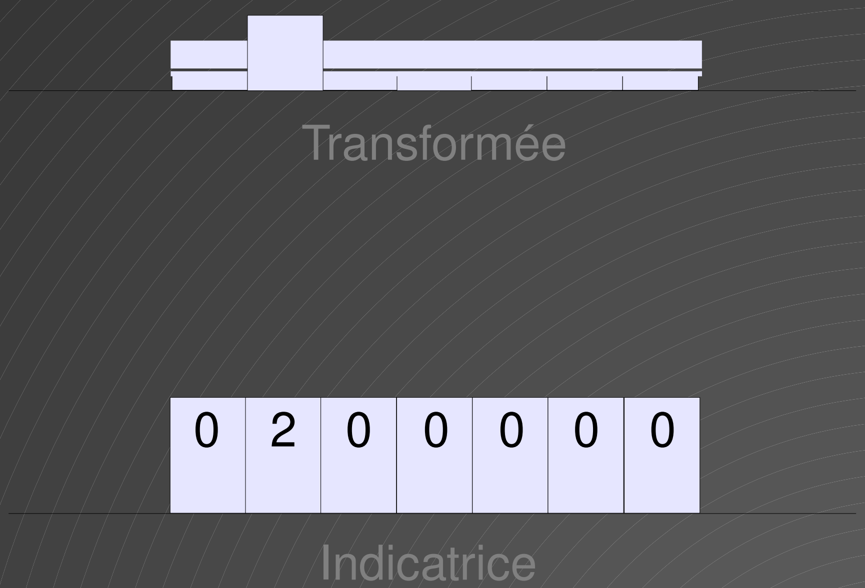
Transformée



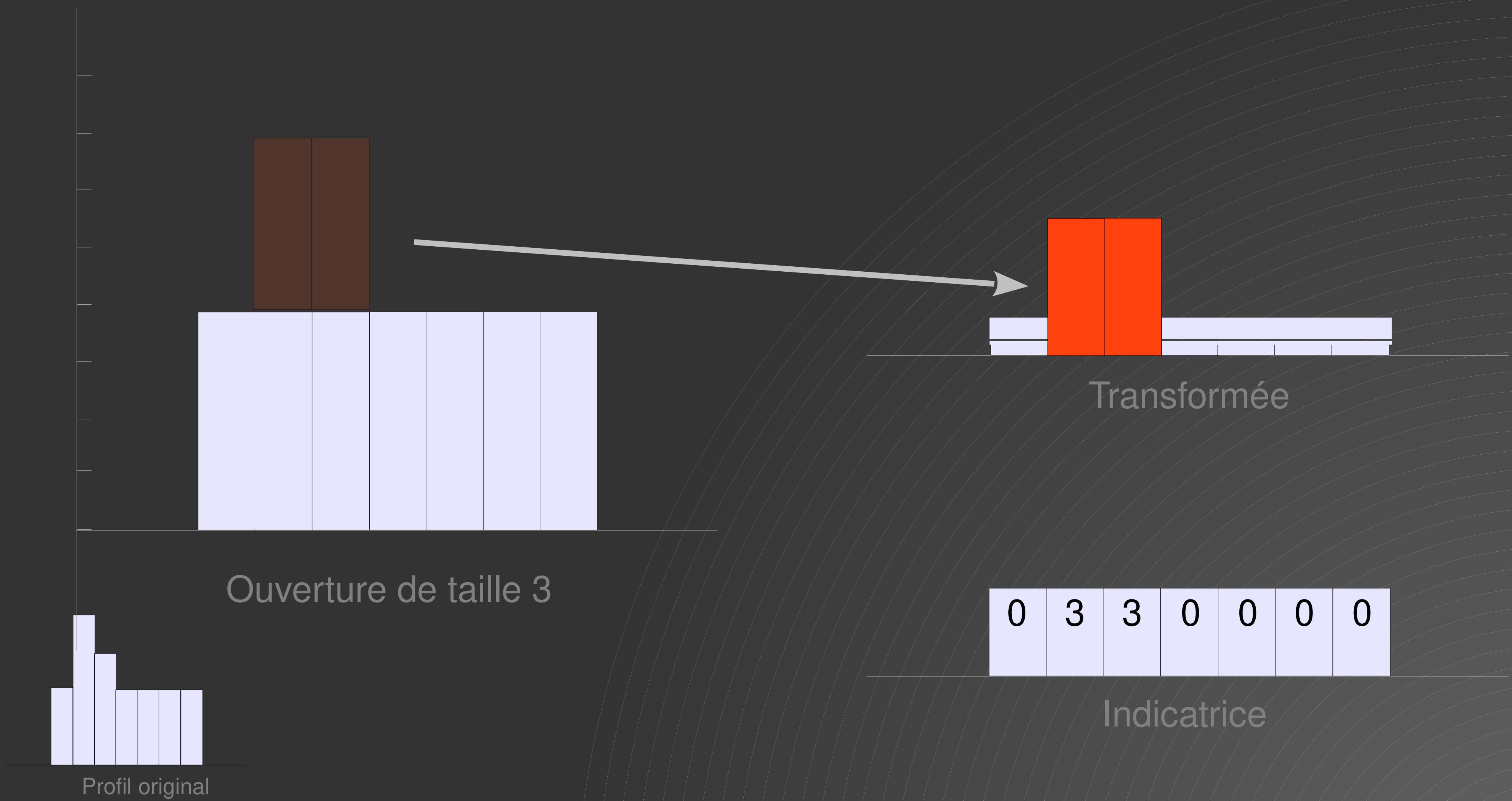
Indicatrice

Ouverture ultime

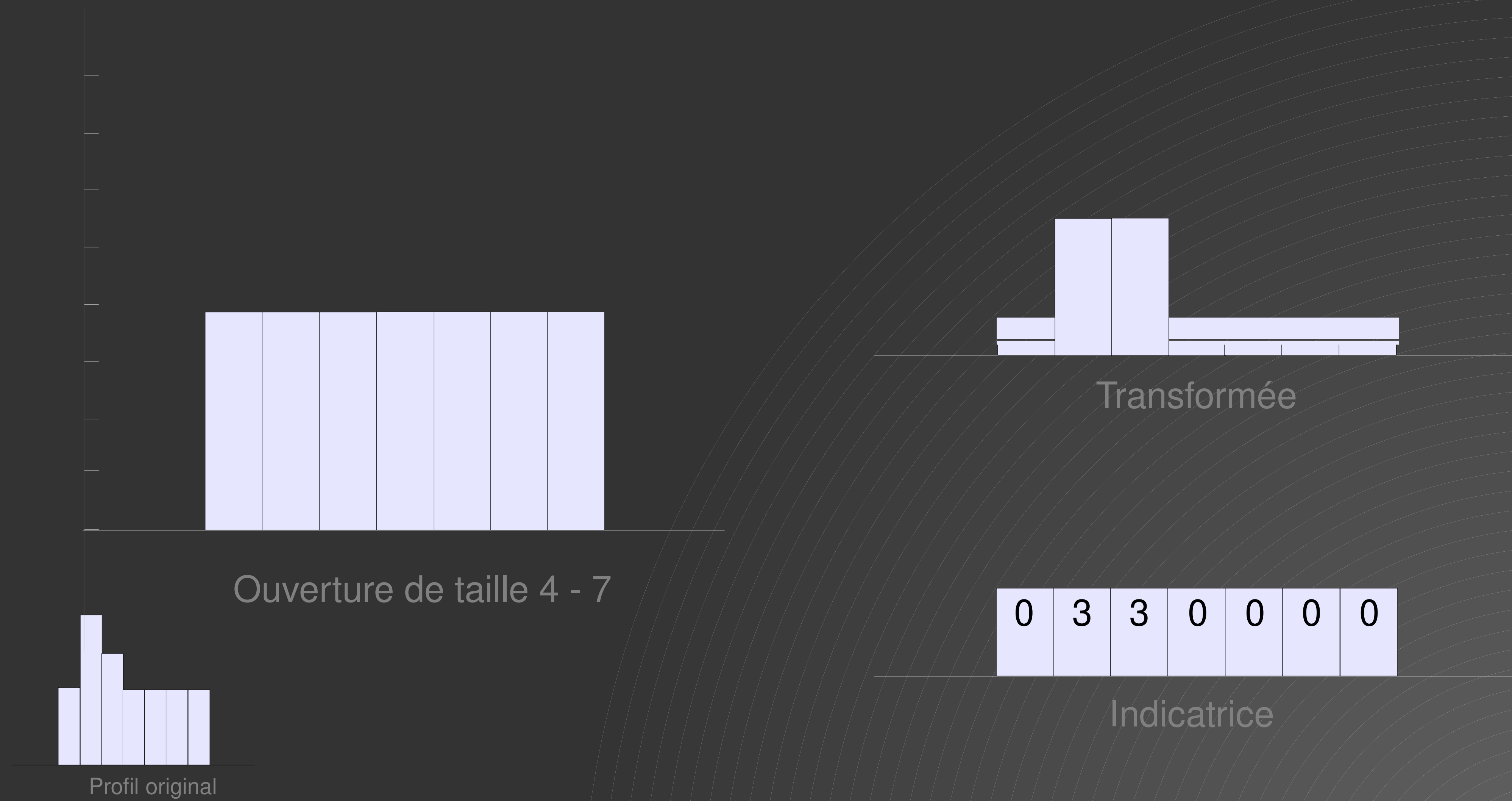




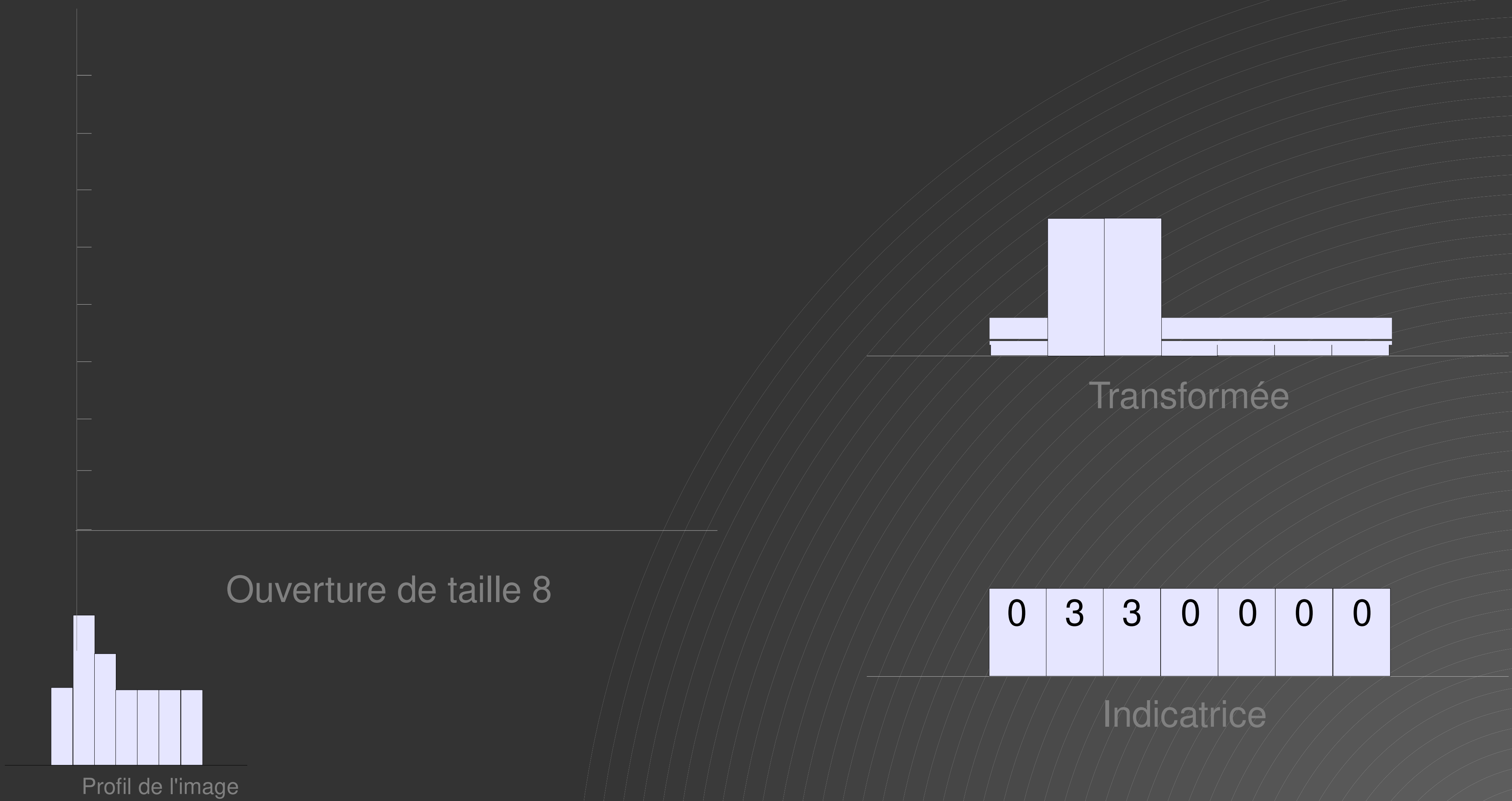
Ouverture ultime



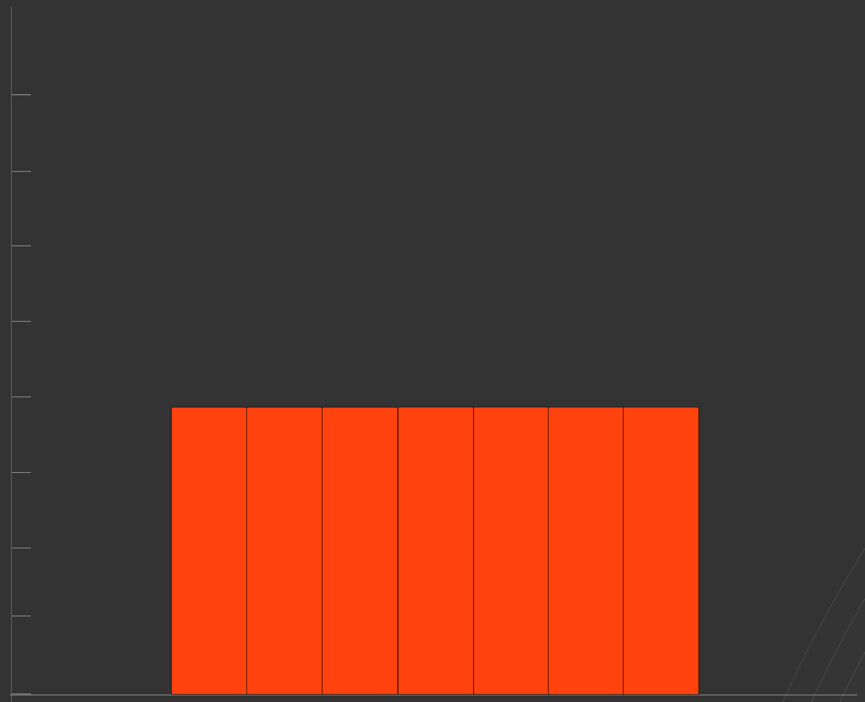
Ouverture ultime



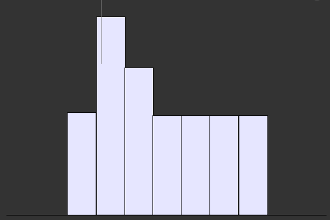
Ouverture ultime



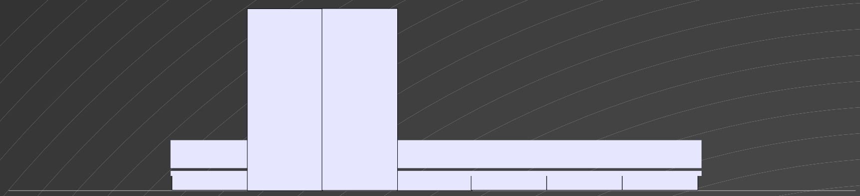
Ouverture ultime



Ouverture de taille 8



Profil de l'image

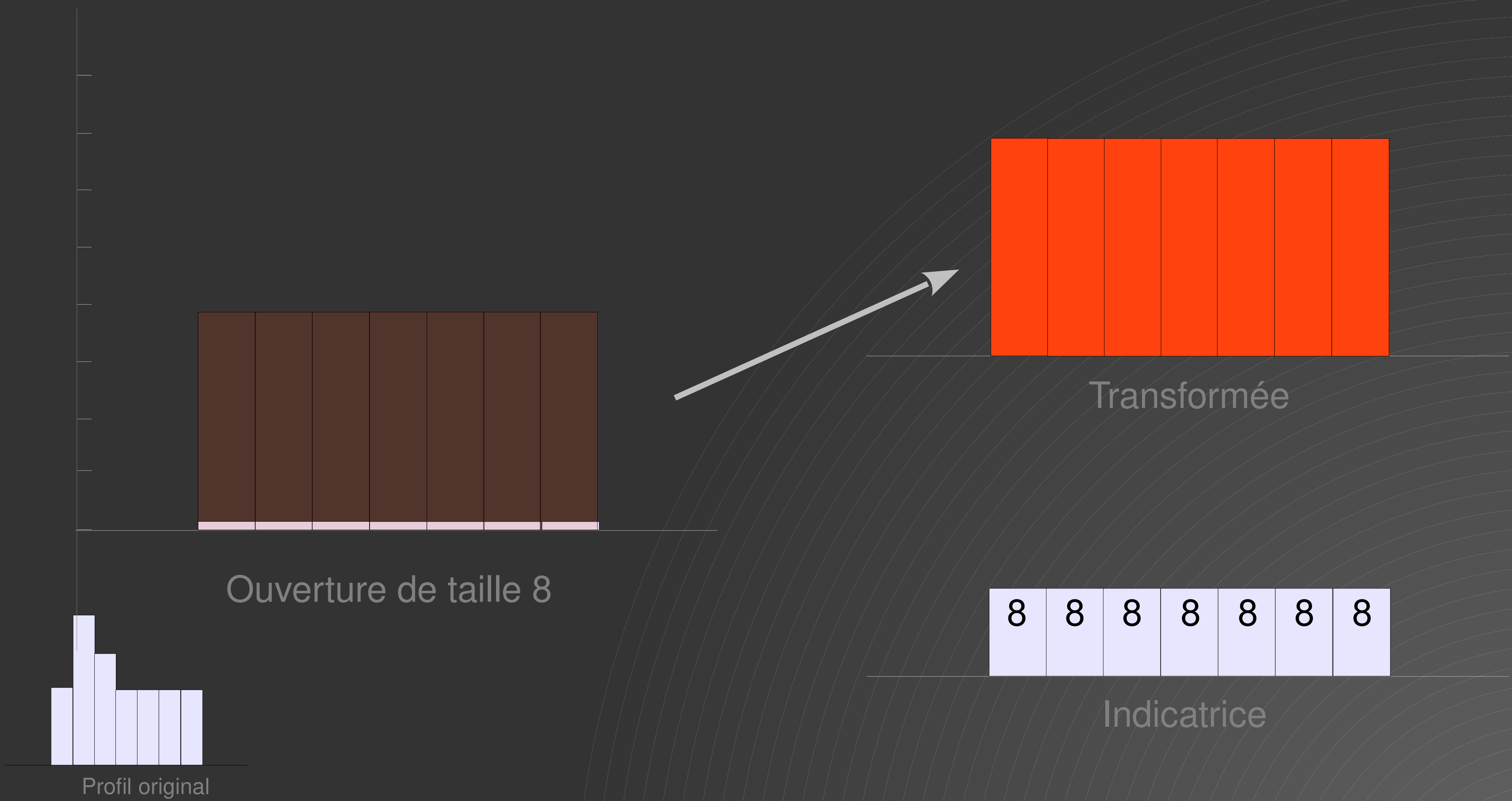


Transformée

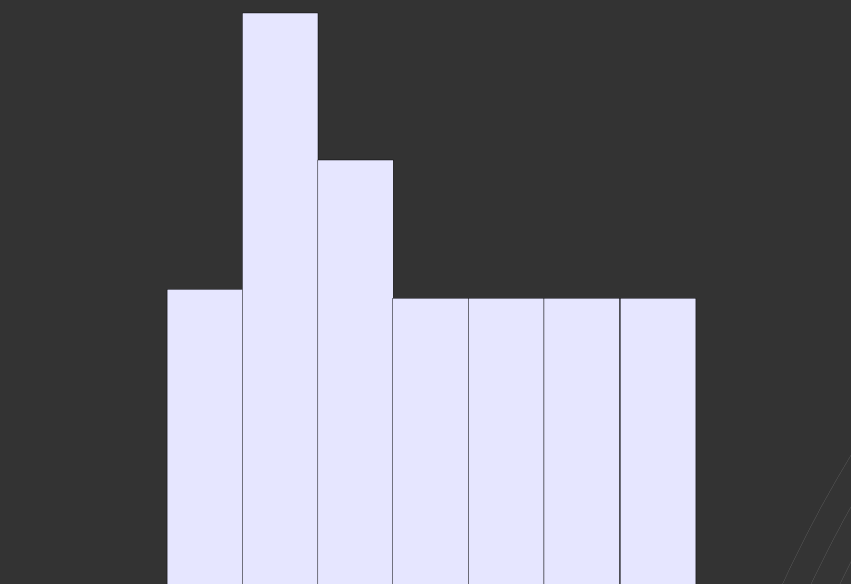
0	3	3	0	0	0	0

Indicatrice

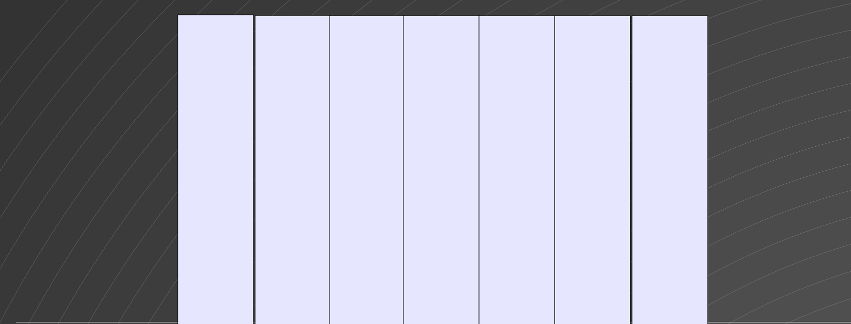
Ouverture ultime



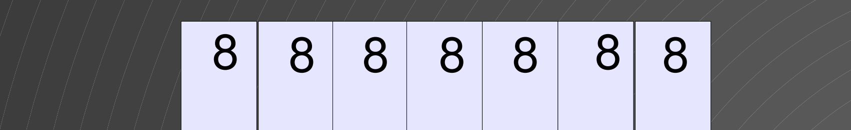
Ouverture ultime



Profil de l'image originale



Transformée



Indicatrice

Ouverture ultime

Image originale

Image indicatrice

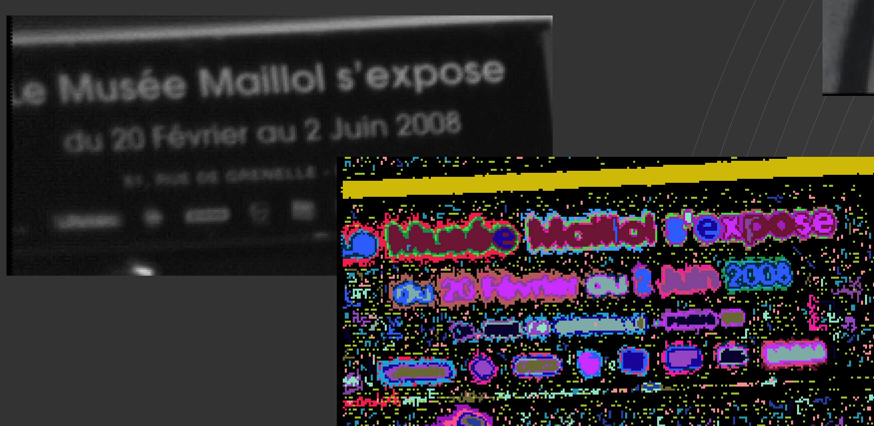
Image transformée

Ouverture ultime

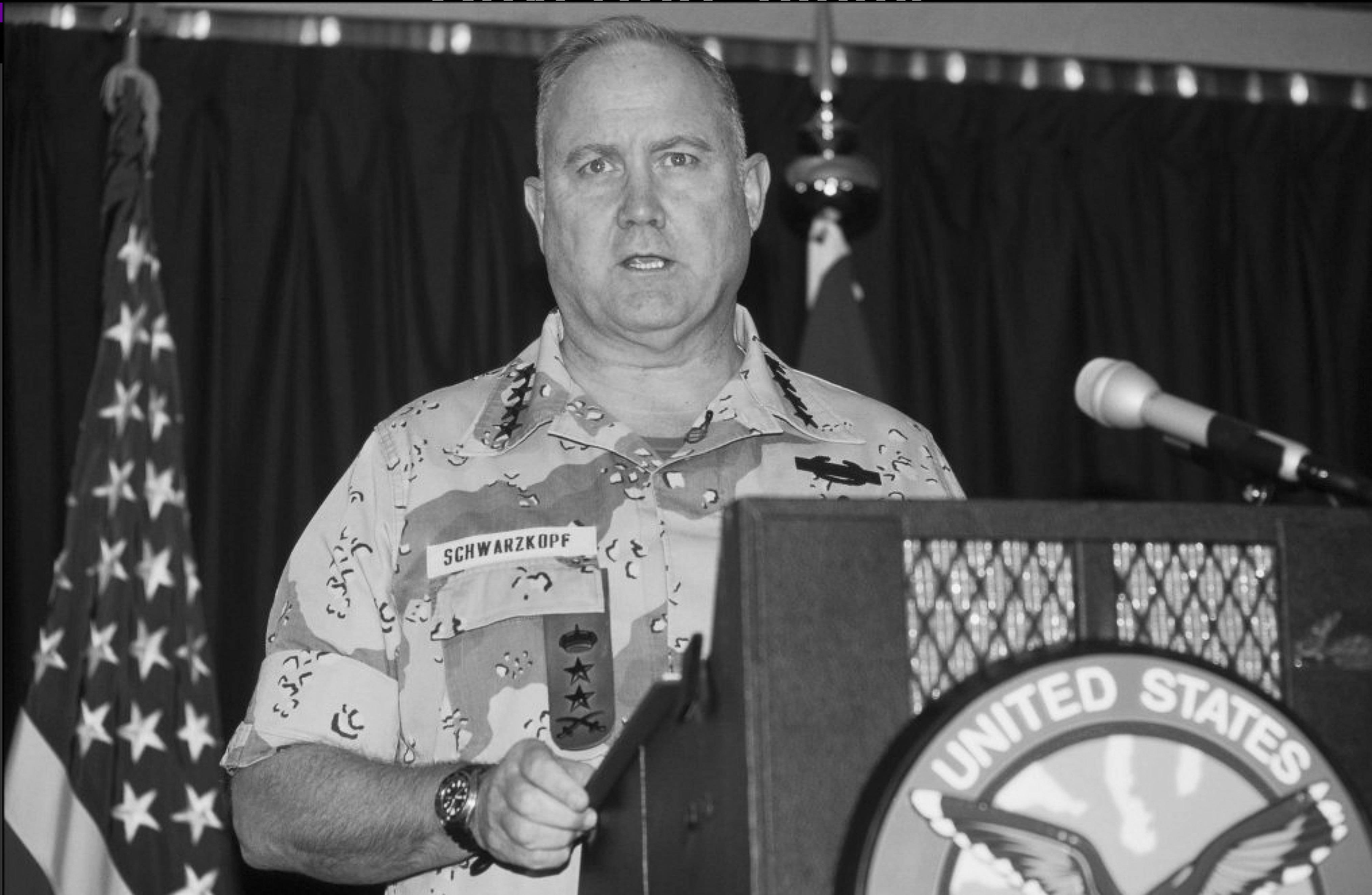
Segmentation :
- Étiquetage de la sortie de l'ouverture ultime

Avantages :
- Segmentation efficace (textures)
- Sans paramètres

Inconvénients :
- Lent
- Problèmes liés aux panneaux
- Problèmes liés au flou

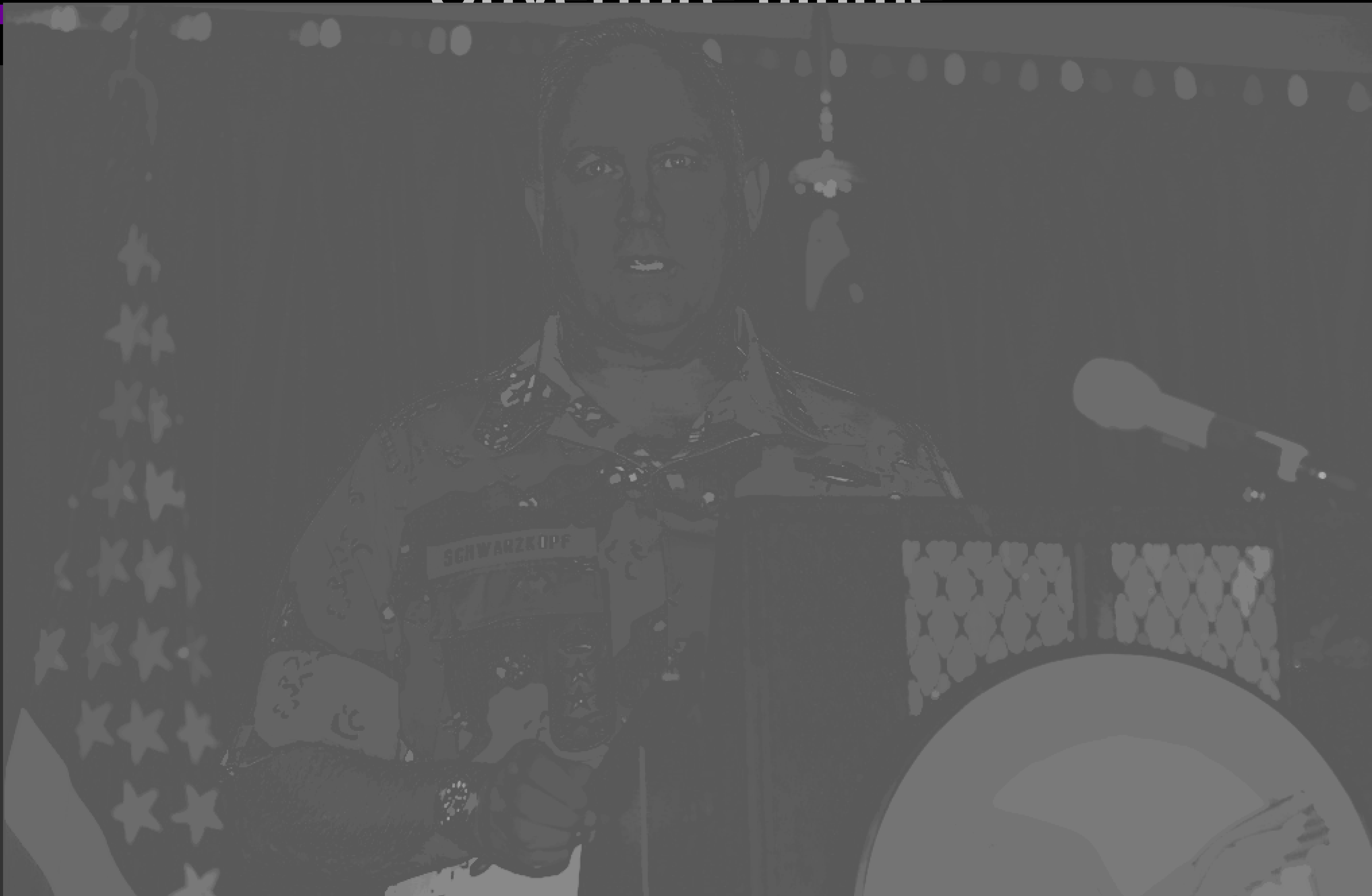


Ouverture ultime



Ouverture ultime

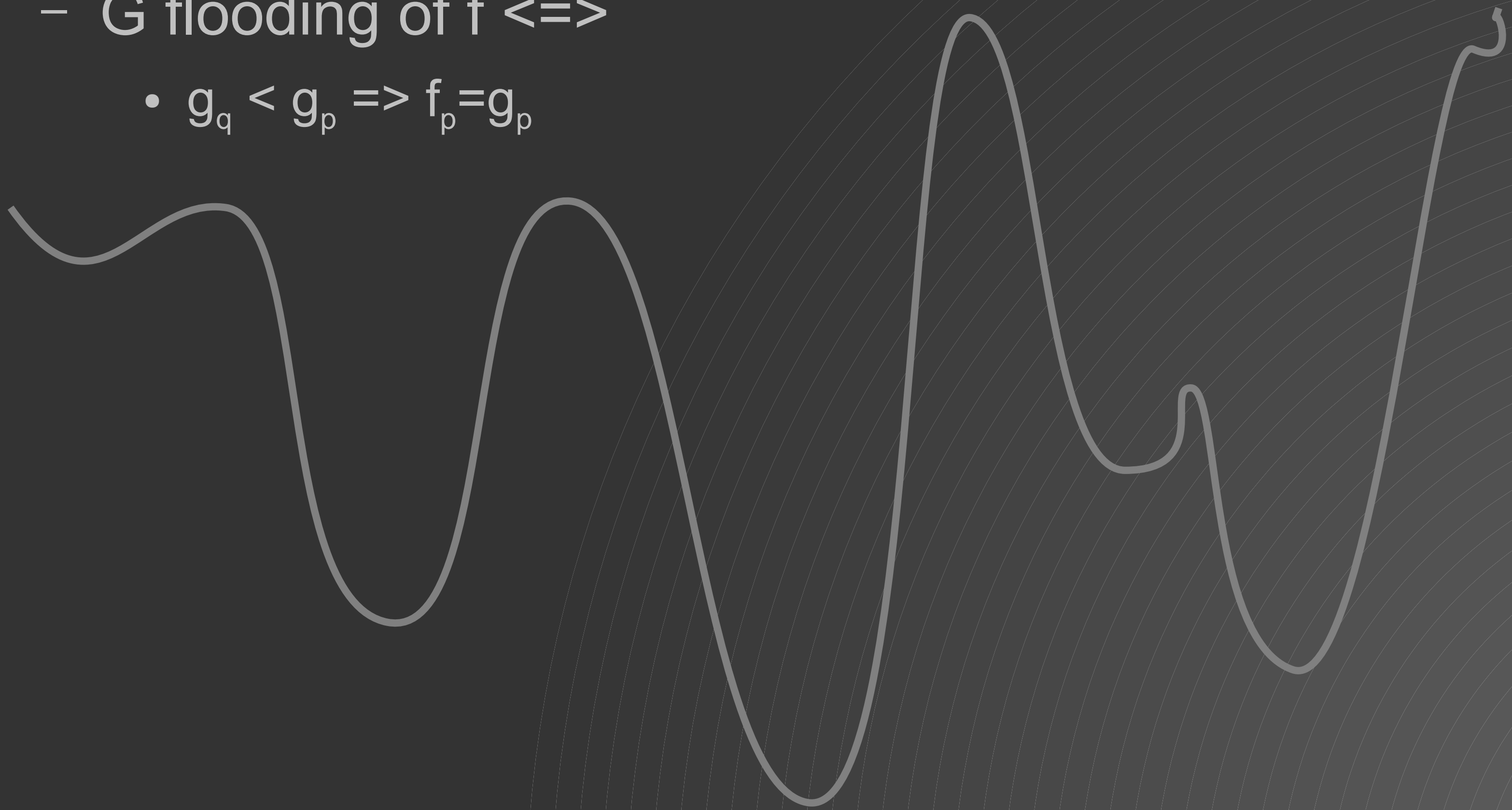
Ouverture ultime



Flooding/Razing

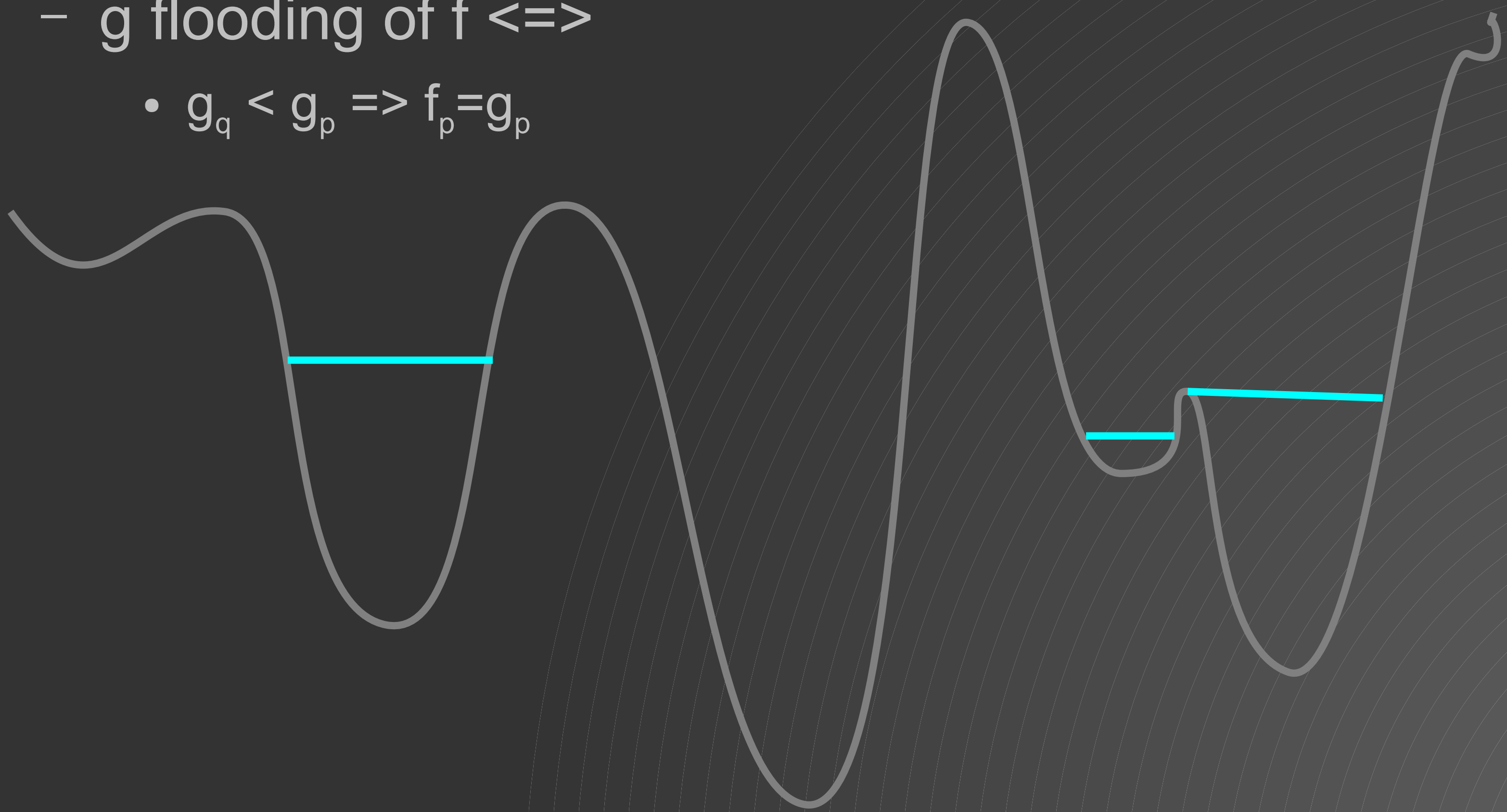
Flooding/Razing

- Flooding
  - Pour tout couple de points voisins (p,q)
    - G flooding of f <=>
      - $g_q < g_p \Rightarrow f_p = g_p$



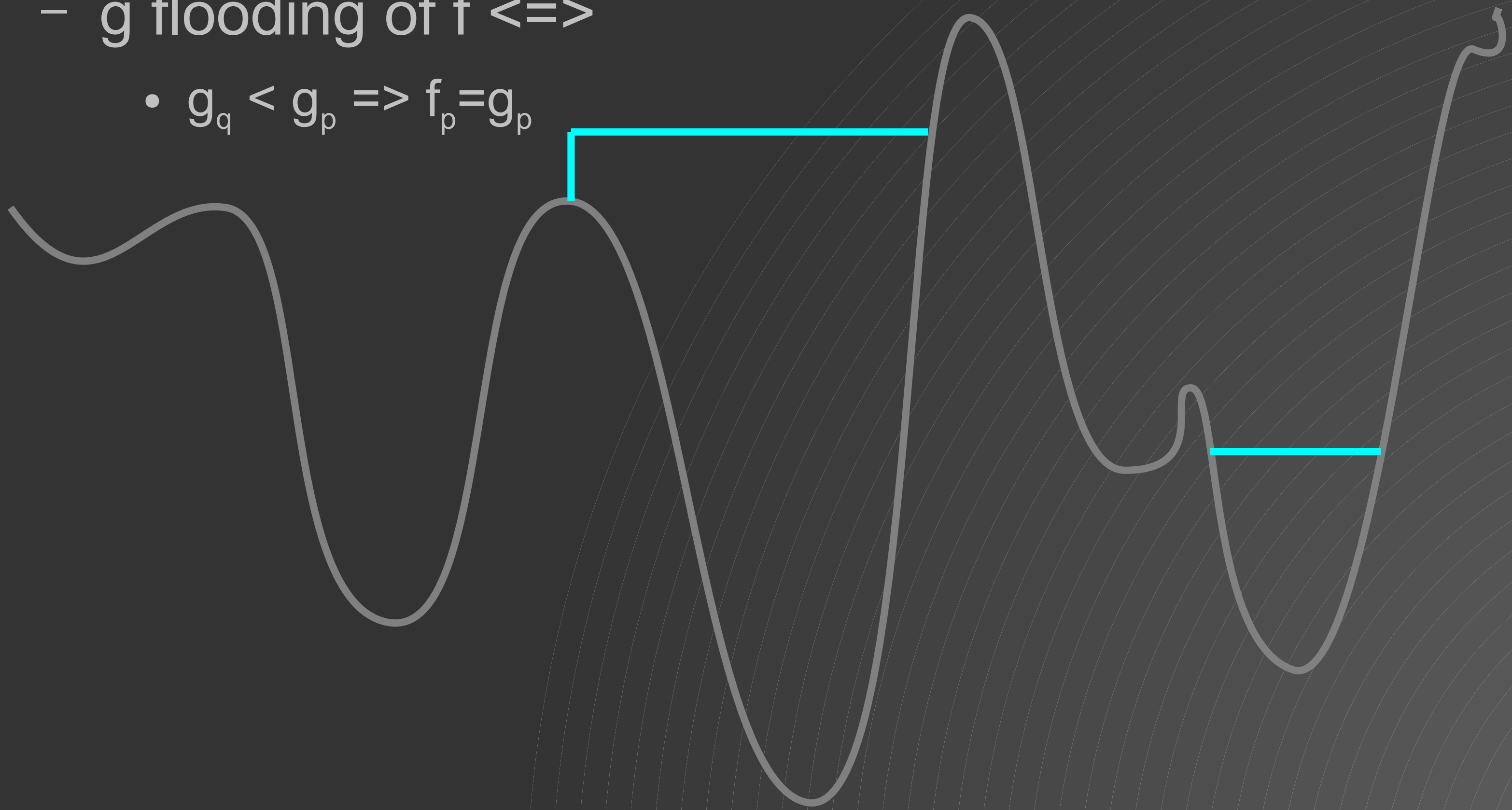
Flooding/Razing

- Flooding
  - Pour tout couple de points voisins (p,q)
    - g flooding of f <=>
      - $g_q < g_p \Rightarrow f_p = g_p$



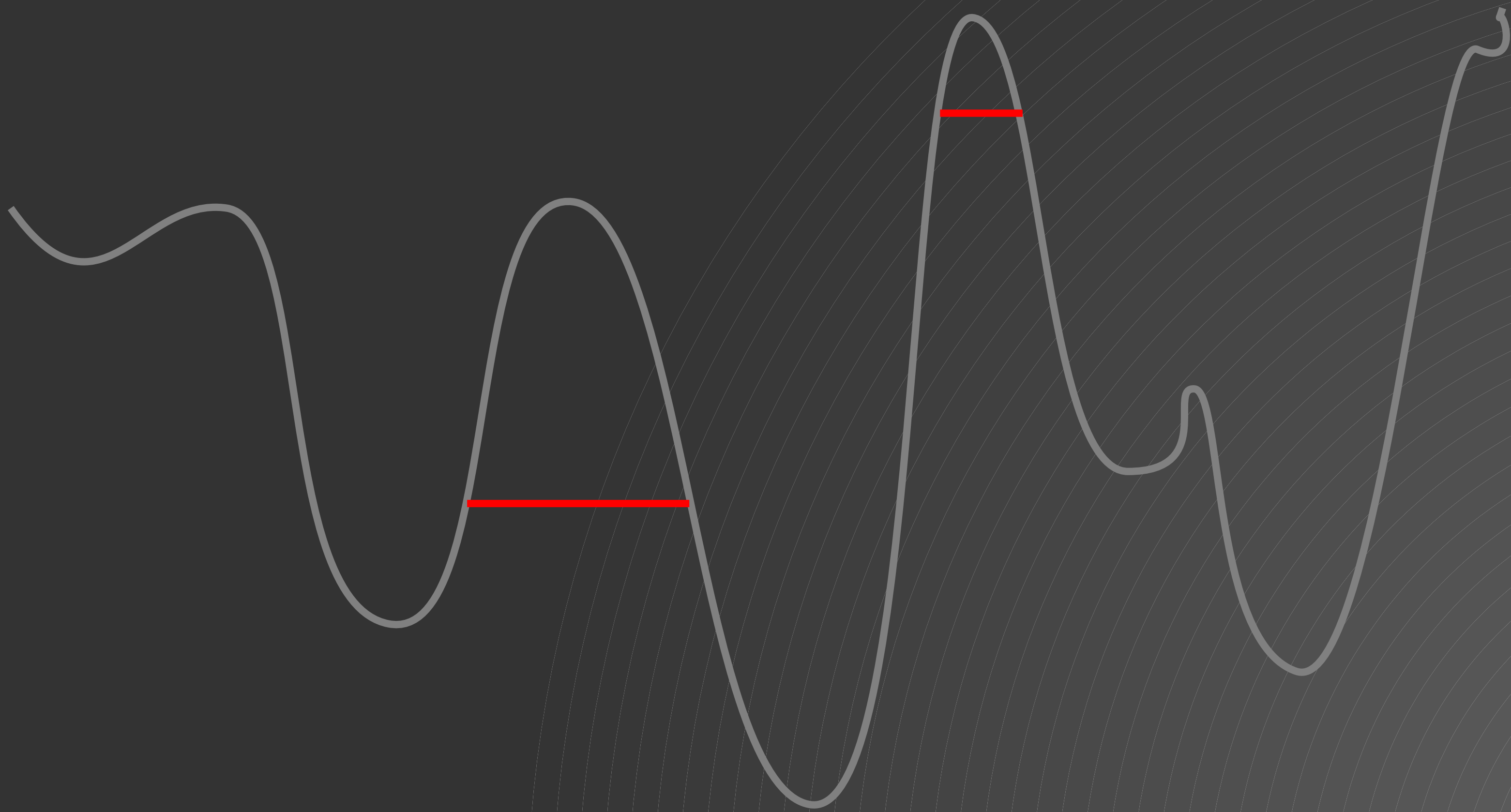
Flooding/Razing

- Flooding
  - Pour tout couple de points voisins (p,q)
    - g flooding of f <=>
      - $g_q < g_p \Rightarrow f_p = g_p$



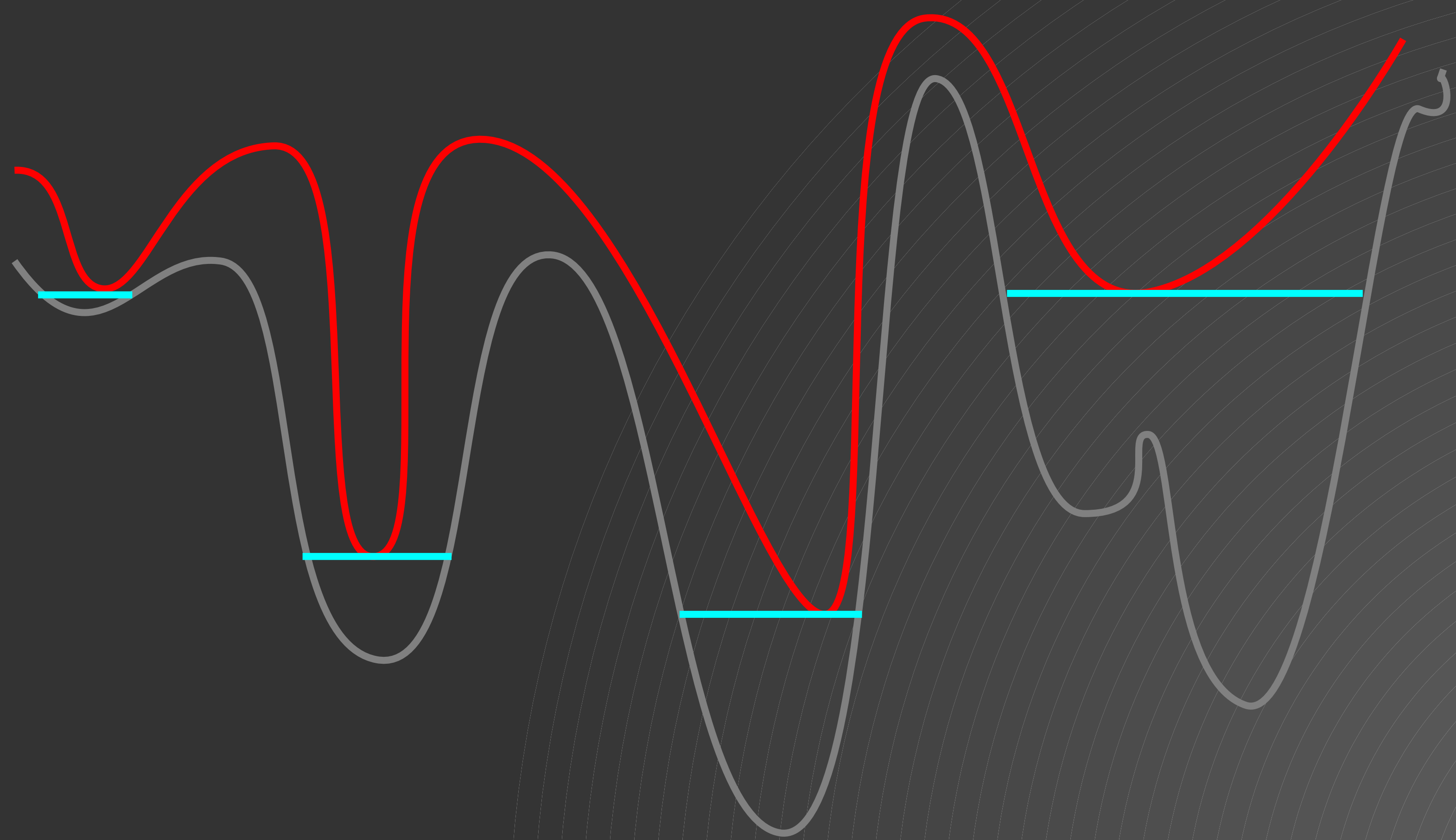
Flooding/Razing

- Razing
  - Dual



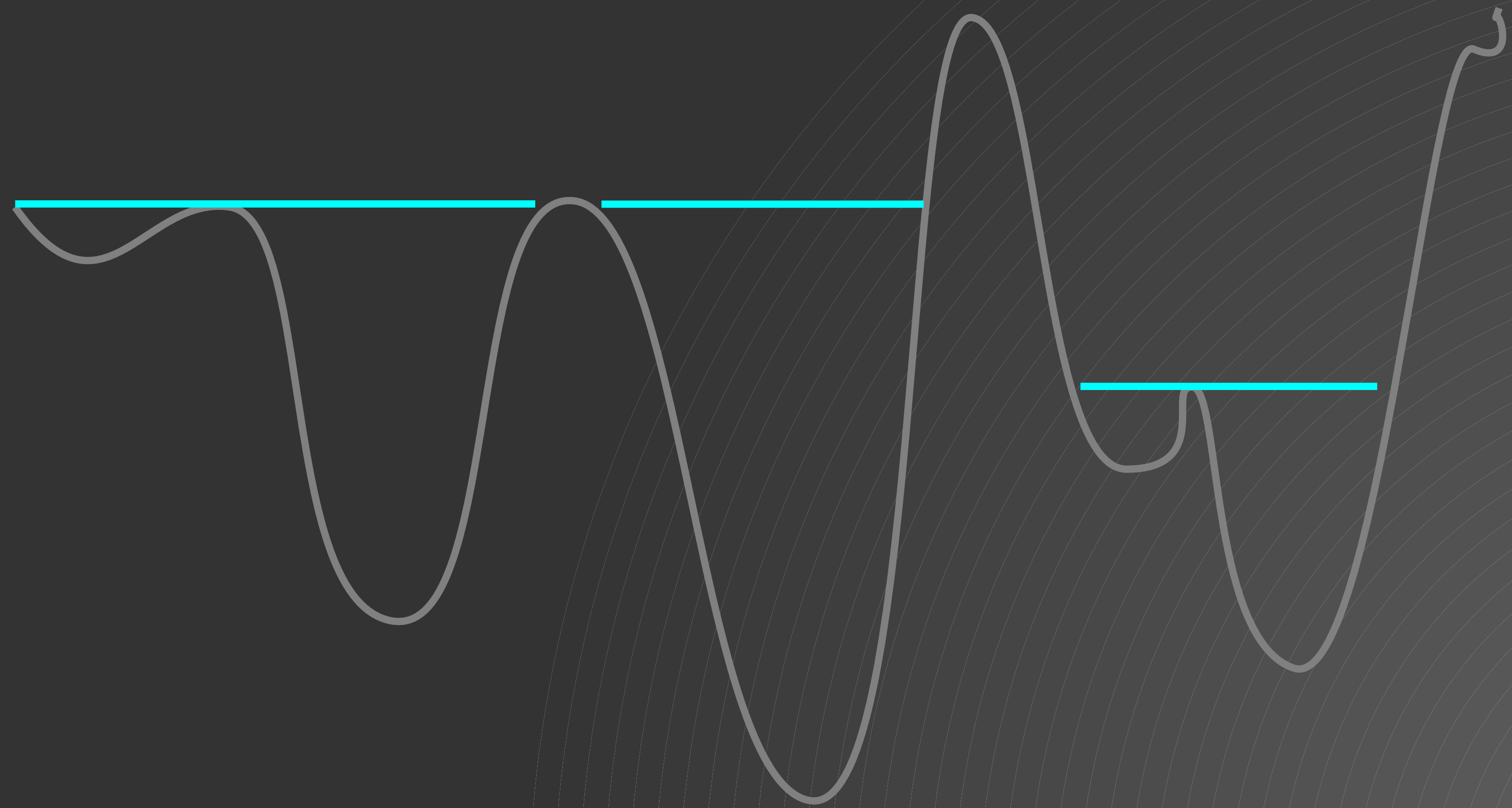
Flooding/Razing

- Constrained flooding



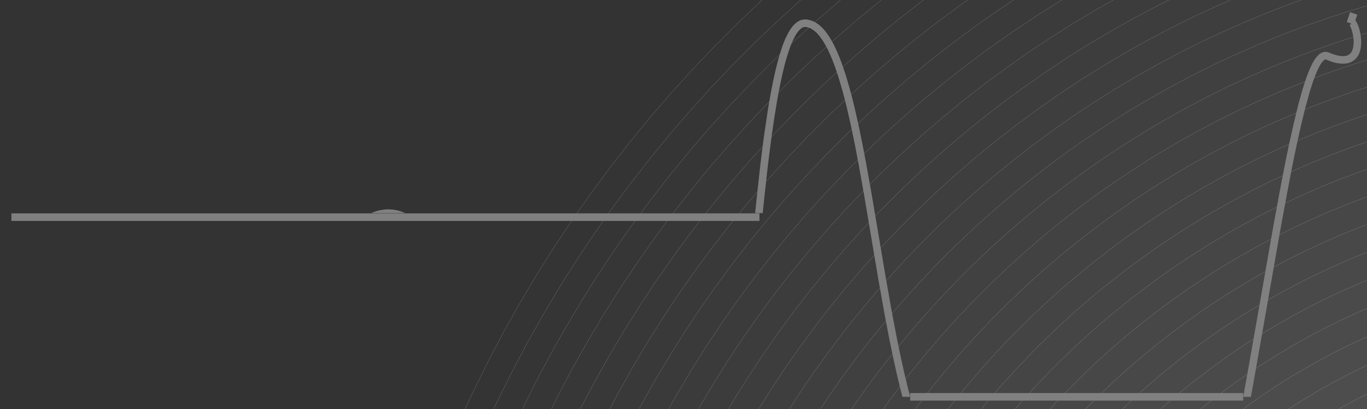
Flooding/Razing

- Waterfall simplification



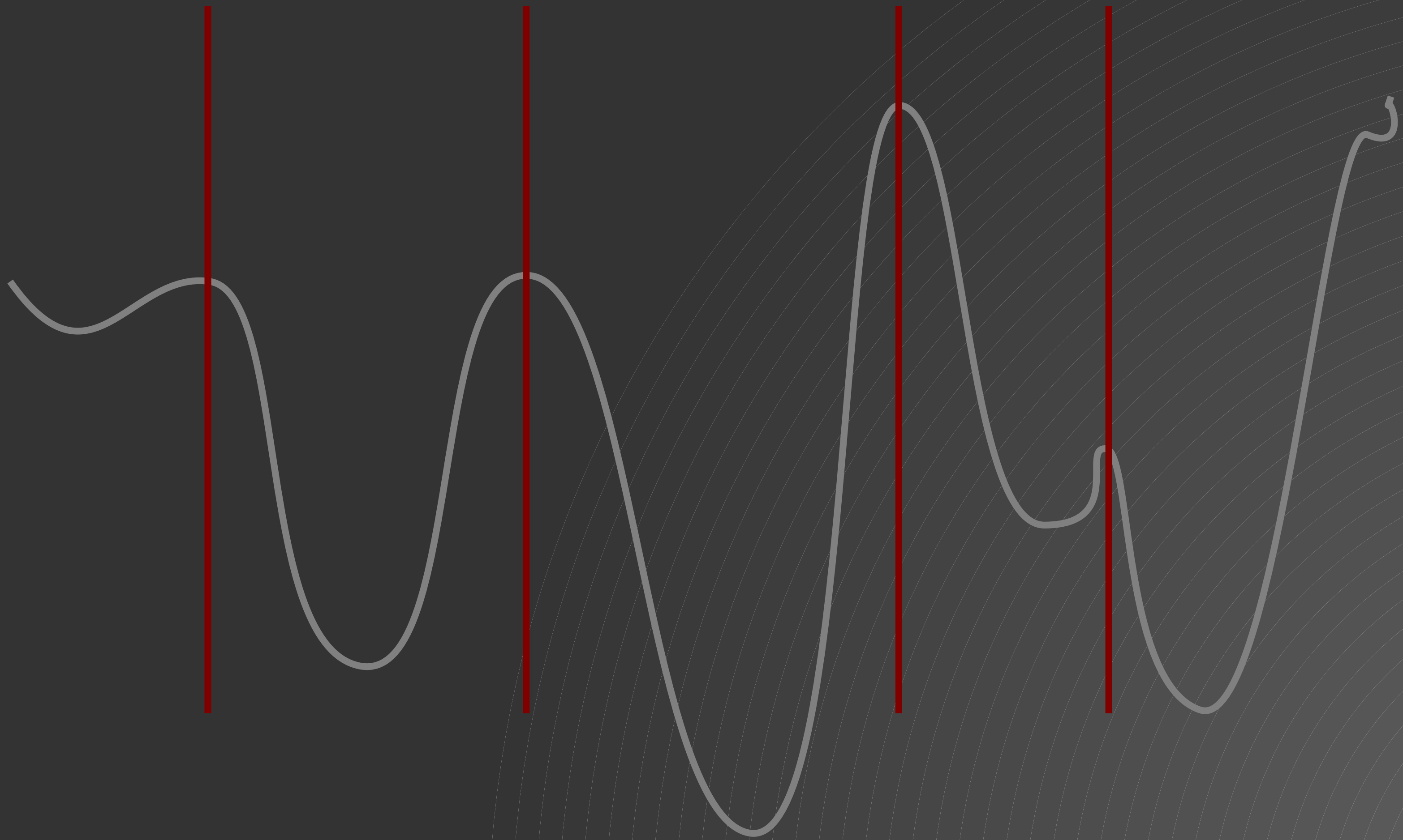
Flooding/Razing

- Waterfall simplification



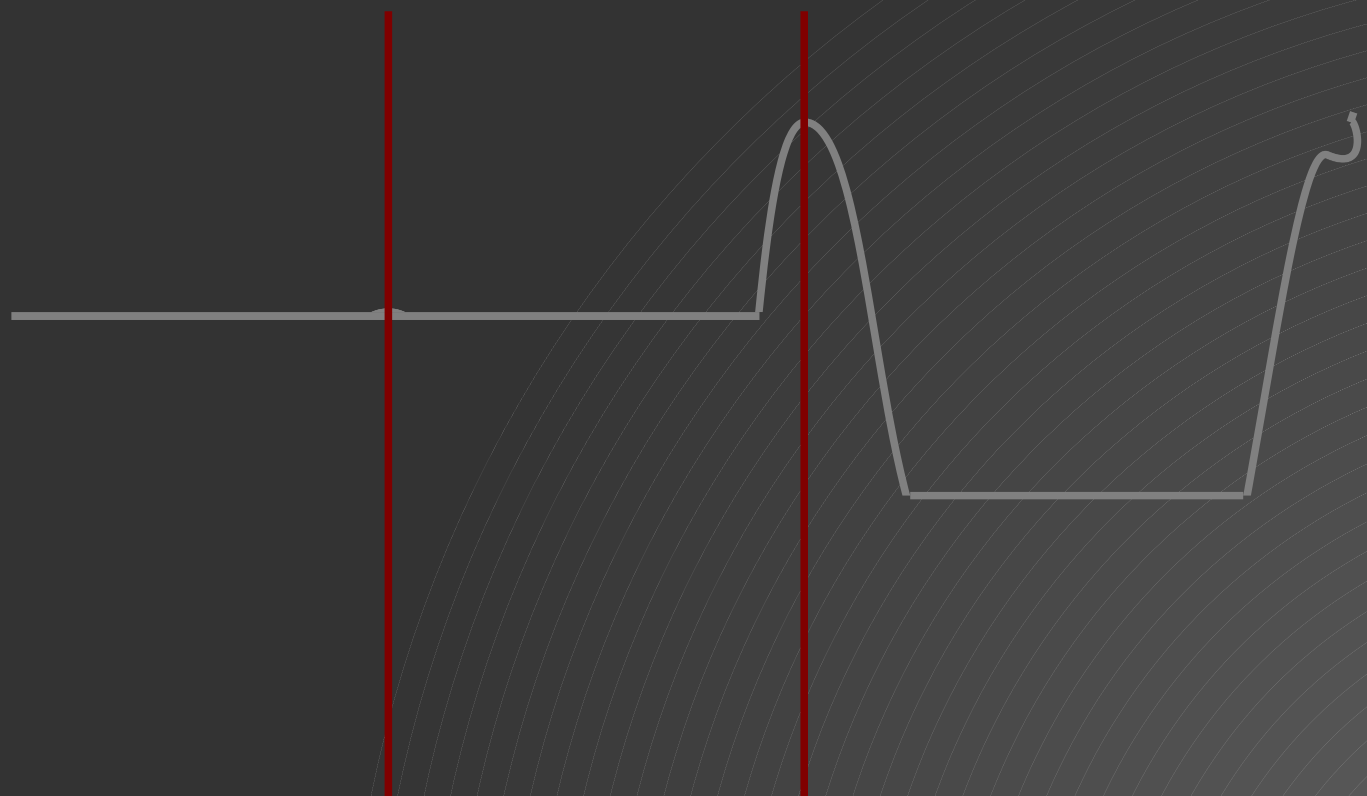
Flooding/Razing

- Waterfall simplification



Flooding/Razing

- Waterfall simplification

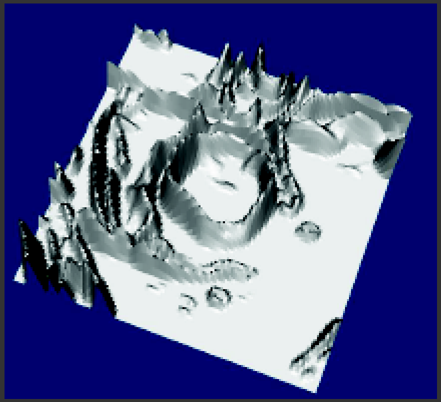


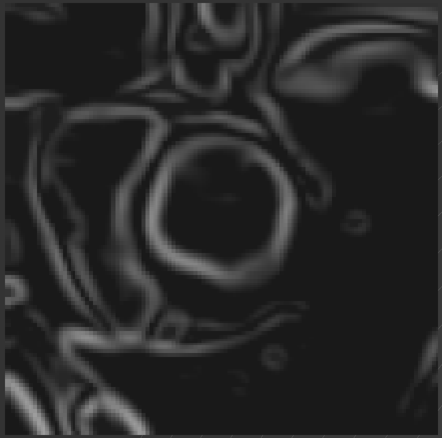
Flooding/Razing

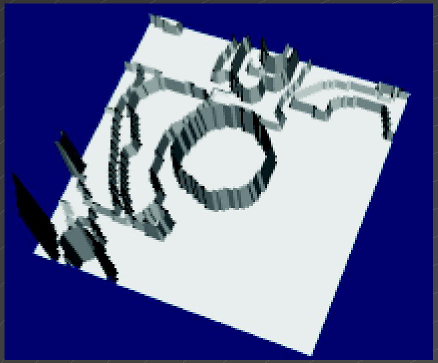
- Leveling
  - Flooding 1 → Razing 1 → Flooding 2 → Razing 2 …

Watershed

- Segmentation







Conclusion

- La Morphologie Mathématique permet
  - d'appliquer certains traitements simplement
    - bien adapté à la segmentation
    - ...
  - de faire un peu de classification

Fin